CIÊNCIA ABERTA
gradiva

A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

PHILIP J. DAVIS E REUBEN HERSH

PRÉMIO DO MELHOR LIVRO AMERICANO

Uma visão brilhante e fundamentada do desenvolvimento da matemática.[...] Magnífico. Consegue comunicar ao leitor comum a beleza e o fascínio pelo tema.

New York Times

Uma verdadeira jóia. Uma obra-prima.

American Mathematical Monthly

O riquíssimo e diversificado mundo da matemática é apresentado neste livro: a sua história e filosofia, a sua estética e pedagogia – mesmo as personalidades dos matemáticos são apresentadas em belíssimos *sketches* biográficos, pontuados por acessíveis e sólidas discussões das obras.[...] Um livro verdadeiramente maravilhoso.

The New Yorker

De repente, somos transportados para outro mundo – um mundo novo e diferente, mas ao mesmo tempo estranhamente familiar. Matemáticos ilustres, problemas famosos e problemas curiosos; as ideias, a história, a descoberta, a filosofia: *A Experiência Matemática* inspira-nos o entusiasmo de pensar, de respirar, de viver a matemática. Não é um livro de divulgação: é uma obra de arte única.

JORGE BUESCU, Faculdade de Ciências

•

PHILIP J. DAVIS é professor emérito de Matemática Aplicada na Universidade Brown, em Providence.

REUBEN HERSH é professor emérito de Matemática na Universidade do Novo México, em Albuquerque.

ISBN 978-972-662-427-1

CIÊNCIA ABERTA
gradiva

PHILIP J. DAVIS • REUBEN HERSH

A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

REVISÃO CIENTÍFICA
JORGE BUESCU
FACULDADE DE CIÊNCIAS

gradiva

Título original *The Mathematical Experience*

Tradução Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro
Revisão científica Jorge Buescu
Revisão de texto José Soares de Almeida e Inês Fraga
Capa Armando Lopes
Fotocomposição Gradiva
Impressão e acabamento Manuel Barbosa & Filhos, L.da

Rua Almeida e Sousa, 21 – r/c esq. — 1399-041 Lisboa
Telef. 21 393 37 60 — Fax 21 395 34 71
Dep. comercial Telefs. 21 397 40 67/8 — Fax 21 397 14 11
geral@gradiva.mail.pt / www.gradiva.pt

1.ª edição Novembro de 1995
2.ª edição Janeiro de 2013
Depósito legal 353 691/2013
ISBN 978-972-662-427-1

gradiva
Editor GUILHERME VALENTE

Para os meus pais,
Mildred e Philip Hersh

***

Para o meu irmão,
Hyman R. Davis

Índice

Prefácio

Os mais antigos registos matemáticos de que temos conhecimento datam de 2400 a. C., mas não há motivo para supormos que a necessidade de criar matemática e de a aplicar não seja solidária com toda a civilização. Em quatro ou cinco milénios surgiu um vasto corpo de práticas e conceitos que designamos por matemática e que tem sido ligado de diversas formas à nossa vida quotidiana. Qual é a natureza da matemática? Qual é o seu significado? Quais são as suas preocupações? Qual é a sua metodologia? Como se cria? Como se aplica? Como se adapta à diversidade da experiência humana? Que benefícios dela decorrem? Que malefícios? Que importância poderá atribuir-se-lhe?

Estas difíceis questões não se tornam mais fáceis por a quantidade de matéria ser tão vasta e a quantidade de inter-relações tão densa que é simplesmente impossível a qualquer pessoa abarcá-la na sua totalidade, quanto mais resumi-la e comprimir a súmula entre as capas de um livro de dimensão média. Para não sermos subjugados por esta imensa quantidade de informação, pensemos na matemática de outra forma. Desde há centenas de anos que a matemática é uma actividade humana. Em certa medida, todos somos matemáticos e fazemos matemática conscientemente. Tomar uma decisão de compra, medir uma faixa de papel de parede ou decorar um vaso com um padrão regular, tudo isto é fazer matemática. Mais ainda, qualquer pessoa é também, em certa medida, um filósofo da matemática. Basta que, por vezes, diga «mas os números não mentem!» para se juntar às fileiras de Platão e de Lakatos.

Para além da imensa população que faz um uso modesto da matemática, há pessoas que trabalham em matemática por profissão. Praticam a

matemática, cultivam-na, ensinam-na, criam-na e aplicam-na numa larga variedade de circunstâncias. Deverá ser possível explicar a leigos o que estão essas pessoas realmente a fazer e por que deve a sociedade apoiá-los nessa tarefa. Este é, resumidamente, o objectivo que nos propusemos. Este livro não tem a intenção de apresentar uma discussão sistemática e completa de um *corpus* matemático específico, recente ou clássico. Tem sim a intenção de registar a inesgotável diversidade que a experiência matemática apresenta. As grandes linhas da nossa narrativa serão a essência da matemática, a sua história e filosofia e o processo de descoberta do conhecimento matemático. Este livro não deve ser visto como uma compressão, mas antes como uma impressão. Não é um livro de matemática, é um livro sobre a matemática. É inevitável que inclua em si alguma matemática. Da mesma forma, sem ser um livro de história ou filosofia, discutirá a história e filosofia da matemática. Daí decorre que o leitor deverá trazer à leitura um leve conhecimento prévio nestas matérias e uma semente de interesse, a plantar e nutrir. Qualquer leitor com estas características não sentirá dificuldade em apreciar a maior parte do livro. Há, todavia, certas passagens em que apresentamos material especializado e dirigimos a nossa narrativa ao profissional que utiliza ou produz matemática. Aqui talvez o leitor se sinta como um conviva num jantar de família: depois de uma educada conversa geral, a família volta-se para os seus assuntos, com as suas delícias e preocupações, e o convidado fica em suspenso, mas fascinado. Em tais passagens o leitor deverá avançar sensata e despreocupadamente.

Os ensaios neste livro podem, de um modo geral, ser lidos independentemente uns dos outros.

Torna-se necessário um comentário acerca do uso do pronome *eu* num livro com dois autores. Será por vezes óbvio qual dos autores escreveu o *eu*. De qualquer forma, uma confusão de identidade não causaria prejuízos significativos, uma vez que cada um do autores concorda, de uma forma geral, com as opiniões do outro.

Agradecimentos

Parte do material deste livro foi colhido de artigos já publicados. Vários desses artigos são de autoria conjunta. «Non-Cantorian set theory», de Paul Cohen e Reuben Hersh, e «Non-standard analysis», de Martin Davis e Reuben Hersh, foram ambos publicados na *Scientific American.* «Nonanalytic aspects of mathematics», de Philip J. Davis e James A. Anderson, foi publicado na *SIAM Review.* Aos professores Anderson, Davis e M. Cohen e àqueles editores estendemos a nosso agradecimento pela permissão concedida para aqui incluirmos o seu trabalho.

Entre os artigos individuais escritos pelos autores e aqui citados incluem-se «Number», «Numerical analysis» e «Mathematics by fiat?», de Philip J. Davies, publicados na *Scientific American,* «The mathematical sciences», MIT Press e *Two Year College Mathematical Journal,* respectivamente, e «Some proposals for reviving the philosophy of mathematics» e «Introducing Imre Lakatos», de Reuben Hersh, publicados em *Advances in Mathematics* e *The Mathematical Intelligencer,* respectivamente.

Agradecemos também a amabilidade das seguintes organizações e pessoas que nos permitiram a reprodução de material contido neste livro: Academia de Ciências de Göttingen, Ambix, Dover Publishers, *Mathematics of Computation,* MIT Press, *New Yorker Magazine,* professor A. H. Schoenfeld e John Wiley and Sons.

A secção sobre a análise de Fourier foi escrita por Reuben Hersh e Phyllis Hersh. Por decisivas discussões de questões filosóficas, pela paciente e cuidadosa edição de rascunhos e pelo seu inabalável apoio

moral a este projecto, Phyllis Hersh deu contributos essenciais que reconhecemos com prazer.

As seguintes pessoas e organizações permitiram-nos generosamente a reprodução de material artístico e gráfico: professores Thomas Banchoff e Charles Strauss, biblioteca da Universidade de Brown, Museum of Modern Art, The Lummus Company, professor Ron Resch, Routledge e Kegan Paul, professor A. J. Sachs, University of Chicago Press, Whithworth Art Gallery, Universidade de Manchester, Departamento de Ciência da Computação da Universidade de Utah e Yale University Press.

Agradecemos aos professores Peter Lax e Gian-Carlo Rota o seu encorajamento e sugestões. O professor Gabriel Stoltzenberg manteve connosco uma animada e fértil correspondência sobre algumas das questões aqui discutidas. O professor Lawrence D. Kugler leu o manuscrito e fez muitas e valiosas críticas. Temos em alta consideração a participação do professor José Luís Abreu num seminário sobre filosofia da matemática.

Os participantes no Seminário sobre Questões Filosóficas da Matemática, que teve lugar na Universidade de Brown, bem como os alunos de cadeiras dadas na Universidade do Novo México e em Brown, ajudaram-nos a cristalizar as nossas posições, sendo essa ajuda reconhecida com gratidão. O auxílio do professor Igor Najfeld foi especialmente apreciado.

Devemos expressar o nosso apreço aos nossos colegas do Departamento de História da Matemática da Universidade de Brown. Ao longo de muitos anos de almoços conjuntos, os professores David Pingree, Otto Neugebauer, A. J. Sachs e Gerald Toomer proporcionaram-nos os «três Is»: *informação, insight e inspiração.* Agradecemos ao professor Din-Yu Hsieh a informação sobre a história da matemática chinesa.

Agradecemos especialmente a Eleanor Addison por muitos *line drawings.* A nossa gratidão também a Edith Lazear pela atenta e crítica leitura dos capítulos 7 e 8 e pelos seus comentários editoriais.

Queremos agradecer ainda a Katrina Avery, Frances Beagan, Joseph M. Davis, Ezoura Fonseca e Frances Gajdowski pela sua eficiente ajuda na preparação e tratamento do manuscrito. Ms. Avery também nos deu a sua ajuda com várias referências clássicas.

P. J. Davis
R. Hersh

Apresentação

Dedicada a Mark Kac

Oh philosophie alimentaire!

Sartre

No virar do século o historiador suíço Jakob Burckhardt, que, ao contrário da maioria dos historiadores, gostava de prever o futuro, confidenciou ao seu amigo Friedrich Nietzsche a previsão de que o século XX seria a «era da sobressimplificação».

A previsão de Burckhardt tem-se revelado assustadoramente acertada. Ditadores e demagogos de todos os tipos têm obtido a confiança das massas com a promessa do paraíso depois da guerra que acaba com todas as guerras. Alguns filósofos avançaram ousadas reduções da complexidade de existência à mecânica elástica das bolas de bilhar; outros, mais sofisticados, defenderam que a vida é linguagem e que a linguagem nada mais é do que contas unidas pelas fiadas simples da lógica fregeana. Artistas que com toda a seriedade pintavam padrões de xadrez em vermelho, branco e azul obtêm agora os lances mais altos no Sotheby's. O uso de termos como *mecânico, automático* e *imediato* é hoje aceite pelos magos da Madison Avenue como lei fundamental da publicidade.

Nem mesmo os maiores espíritos da ciência se mostraram insensíveis à sedução da sobressimplificação. A física tem sido impelida pela procura de uma, uma lei apenas que um destes dias unifique todas as forças: a gravidade, a electricidade, as interacções fraca e forte e o que quer que seja. Os biólogos estão agora fascinados pela possibilidade de que o segredo da vida possa vir a ser extraído de uma dupla hélice pontilhada

por grandes moléculas. Os psicólogos receitaram, sucessivamente, a libertação sexual, os medicamentos milagrosos e os berros primevos como cura para a depressão comum, enquanto os pregadores proporiam a menos dispendiosa oferta de admissão no coro uníssono dos renascidos.

É mérito dos matemáticos terem sido os mais lentos a seguir este movimento. A matemática, tal como a teologia e todas as criações livres da mente, obedece às inexoráveis leis do imaginário, e os panglossianos actuais não ajudam a estabelecer a validade de uma conjectura. Podemos admirar Descartes e Grothendieck, quando pretendem reduzir a geometria à álgebra, ou a Russell e Gentzen, quando ordenam que a matemática se transforme em lógica, mas sabemos que certos matemáticos são mais dotados de talento para fazerem desenhos, alguns para a manipulação de símbolos e outros ainda com a capacidade de encontrarem o erro numa demonstração.

Contudo, alguns matemáticos cederam ao simplismo dos nossos dias quando se trata de entender a natureza da sua actividade e a posição da matemática na sociedade. Como é natural, ninguém gosta que lhe seja dito aquilo que está realmente a fazer ou que os seus mais íntimos hábitos de trabalho sejam analisados e descritos. Que diria o senador Proxmire se pousasse os olhos em tal relatório? Talvez seja mais conveniente passar ao senador um exemplar do livro escolar de filosofia da ciência, onde o autor, jovem e ambicioso membro do Departamento de Filosofia, retrata com clareza impecável o matemático ideal a trabalhar idealmente num mundo ideal.

É frequente ouvir-se dizer que a matemática consiste principalmente em «demonstrar teoremas». Será que o trabalho de um escritor é «escrever frases»? O trabalho de um matemático é em grande parte um enredado de intuição, analogia, optimismo e frustração, e a demonstração, longe de estar no âmago da descoberta, é muito frequentemente uma forma de nos assegurarmos de que os nossos espíritos não estão a enganar-nos. Poucas pessoas, ou nenhumas, antes de Davis e Hersh, se tinham atrevido a escrever publicamente isto. Os teoremas não estão para a matemática como os bons pratos estão para um repasto. A analogia nutricional é enganadora. Dominar a matemática é dominar uma visão intangível, é adquirir a capacidade do virtuoso que não consegue explicar o seu desempenho por critérios. Os teoremas de geometria não estão para o campo da geometria como os elementos estão para um conjunto. A relação é mais subtil, e Davis e Hersh descrevem-na com rara honestidade.

Depois de Davis e Hersh, será difícil sustentar a visão *Glasperlenspiel* da matemática. O mistério da matemática, na exposição largamente

documentada dos autores, consiste em que as conclusões procedentes de diversões do espírito encontrem tão impressionantes aplicações práticas. Davis e Hersh decidiram descrever o mistério, em vez de o explicarem.

Tornar a matemática acessível ao leigo instruído, mantendo ao mesmo tempo padrões elevados de qualidade científica, sempre foi considerado uma traiçoeira navegação entre a Cila do desprezo profissional e a Caríbdis da incompreensão pública. Davis e Hersh atravessaram o estreito a todo o pano. Despoletaram uma discussão sobre a experiência matemática que é essencial à sua sobrevivência. Olhando da popa do navio, suspiramos de alívio enquanto o remoinho da sobressimplificação se desvanece ao longe.

GIAN-CARLO ROTA
9 de Agosto de 1980

O conhecimento a que a geometria aspira é o conhecimento do eterno.

PLATÃO, *A República,* VII, 527

Aquela por vezes cristalina [...] e por vezes difusa substância [...] que é [...] a matemática.

IMRE LAKATOS, 1922-1974

Aquilo que é regular, ordenado, factual, nunca basta para abranger toda a verdade: a vida extravasa sempre a borda de qualquer taça.

BORIS PASTERNAK, 1890-1960

Introdução

Até há cerca de cinco anos era um matemático normal. Não fazia nada de arriscado e pouco ortodoxo, como escrever um livro destes. Tinha o meu «campo» — equações diferenciais parciais — e ficava dentro dele, ou, no máximo, atravessava as fronteiras e divagava até um campo contíguo. Na minha reflexão profunda, na minha verdadeira vida intelectual, empregava categorias e modos de avaliação que absorvera anos antes, durante o treino enquanto estudante universitário. Por não deambular para longe destes modos e categorias, tinha deles apenas uma vaga consciência. Faziam parte da forma como contemplava o mundo, e não parte do mundo que contemplava.

O meu progresso na carreira dependia da minha investigação e daquilo que publicasse dentro do meu campo. Ou seja, existiam recompensas importantes pelo domínio do ponto de vista e dos padrões de raciocínio que partilhava com quem possuía uma formação semelhante à minha, os outros investigadores do meu campo. O valor do meu trabalho seria decidido pelo seu juízo. Mais ninguém estaria habilitado a fazê-lo, e seria mesmo duvidoso que alguém estivesse interessado nisso. Libertar-me desta atitude — ou seja, reconhecê-la, tornar-me ciente de que era apenas uma de muitas maneiras de olhar o mundo, ser capaz de ligá-la e desligá-la conforme o desejasse, avaliá-la e compará-la com outros pontos de vista — nada disto era indispensável ao meu emprego ou à minha carreira. Pelo contrário, aventuras tão dúbias e pouco ortodoxas como esta pareceriam, na melhor das hipóteses, uma perda insensata de tempo valioso — e, na pior, diletantismos pouco dignos com ligações a ramos tão duvidosos como a psicologia, a sociologia ou a filosofia.

A verdade, no entanto, é que cheguei a um ponto em que a minha admiração e fascínio com o significado e propósito, se é que existe algum, desta estranha actividade a que chamamos matemática é igual a, e por vezes até mais forte do que, o meu fascínio por realmente *fazer* matemática. Vejo na matemática um mundo infinitamente complexo e misterioso; explorá-lo é um vício de que espero nunca me curar. Sou nisso um matemático como outro qualquer. No entanto, e para além disso, desenvolvi um segundo eu, um outro, que observa estupefacto este matemático e que está ainda mais fascinado por tão estranha criatura e tão estranha actividade terem vindo ao mundo e aqui persistido ao longo de milhares de anos.

O seu início remonta ao dia em que, finalmente, tive oportunidade de leccionar uma cadeira que se chamava Fundamentos da Matemática. É uma cadeira que se destina principalmente aos estudantes de matemática de nível superior. O meu objectivo ao ensinar esta cadeira, tal como acontecera com todas as outras que tinha ensinado ao longo de vários anos, era aprender eu próprio a matéria. Na altura sabia que havia um passado de controvérsia acerca dos fundamentos. Sabia que tinham existido três grandes «escolas»: os lógicos, associados a Bertrand Russell, os formalistas, liderados por David Hilbert, e a escola construtivista de L. E. J. Brouwer. Possuía uma noção sobre as teorias de cada uma destas três escolas. Contudo, não fazia ideia de com qual, se alguma, concordava e tinha apenas uma vaga ideia sobre o que tinha sucedido a cada uma das três escolas no meio século decorrido desde que os seus fundadores haviam estado activos.

Tinha a esperança de que ensinar a cadeira me oferecesse a oportunidade de ler e estudar sobre os fundamentos da matemática e, enfim, esclarecer as minhas opiniões sobre as partes mais controversas. Não pensava tornar-me investigador de história da matemática, tal como não passei a fazer investigação sobre a teoria dos números depois de leccionar a cadeira correspondente.

Tendo em atenção que o meu interesse pelos fundamentos era mais filosófico do que técnico, procurei planear a cadeira de modo a permitir a participação de alunos interessados sem condições ou pré-requisitos especiais; esperava, em especial, atrair estudantes de filosofia e de ensino da matemática. De facto, surgiram alguns estudantes desses cursos; apareceram também estudantes de engenharia electrotécnica, de ciência da computação e de outros campos. Ainda assim, os estudantes de matemática constituíam a maioria. Descobri um par de livros com bom aspecto e mergulhei neles.

Estando diante de uma turma mista de matemática, ensino e filosofia, para dissertar sobre os fundamentos da matemática, vi-me numa situação nova e estranha. Ensinara matemática durante uns quinze anos, a todos os níveis e em muitas áreas diferentes, mas em todas as minhas cadeiras

a tarefa não era falar sobre matemática, mas sim *fazê-la*. Aqui o objectivo não era fazê-la, mas sim falar sobre ela. Era diferente e aterrador.

À medida que o semestre prosseguia, tornou-se claro que desta vez seria uma história diferente. A cadeira foi, em certo sentido, um sucesso, pois havia muita matéria interessante, muitas oportunidades para discussões estimulantes e para estudo independente e muito para aprender. Porém, noutro sentido, vi que o meu projecto era irrealizável.

Numa cadeira normal de matemática, o programa está relativamente bem definido. Existem problemas a resolver, um método de cálculo a explicar ou um teorema a demonstrar. A parte principal do trabalho é escrever, em geral no quadro. Uma vez resolvidos os problemas, demonstrados os teoremas ou concluídos os cálculos, professor e alunos dão por finda a sua tarefa diária. É claro que, mesmo neste cenário convencional, existe sempre a possibilidade de que aconteça algo inesperado. Uma dificuldade imprevista ou uma questão inesperada levantada por um aluno podem desviar a aula do rumo pretendido pelo instrutor. Ainda assim, sabia-se onde se queria chegar; sabia-se também que o mais importante era aquilo que se escrevia. Quanto ao que era dito, tanto pelos alunos como pelo professor, era relevante apenas enquanto auxiliar de transmissão da importância do que era escrito.

Ao dar início à minha cadeira sobre fundamentos da matemática, formulei as interrogações que julguei serem centrais e a que esperava poder dar resposta, ou pelo menos conseguir esclarecer, quando o semestre chegasse ao fim.

Que é um número? Que é um conjunto? Que é uma demonstração? Que sabemos de matemática, e como o sabemos? Que é o «rigor matemático»? Que é a «intuição matemática»?

Enquanto formulava estas perguntas, verificava que não sabia as respostas. É claro que isso não era surpreendente, pois não pode esperar-se que para «questões filosóficas» como estas existam respostas tão categóricas como aquelas que procuramos em matemática. Haverá sempre diferenças de opinião em relação a esse tipo de interrogações.

Mas aquilo que me perturbava era desconhecer a minha própria opinião. Pior ainda, não possuía uma base, um critério pelo qual avaliar opiniões discordantes ou defender ou atacar um ou outro ponto de vista.

Comecei a falar com outros matemáticos sobre demonstração, conhecimento e realidade em matemática e descobri que o meu estado de incerteza confusa era típico. No entanto, encontrei também uma apetência notável pela discussão acerca das nossas experiências pessoais e convicções privadas.

Este livro é parte do fruto de todos esses anos de ponderação, escuta e controvérsia.

1
A paisagem matemática

Que é a matemática?

Uma definição ingénua, adequada às páginas de um dicionário ou a uma primeira explicação, é a de que a matemática é a ciência da quantidade e do espaço. Alargando um pouco esta definição, podemos acrescentar que a matemática se ocupa também do simbolismo relacionado com a quantidade e o espaço.

Esta definição tem indiscutivelmente uma justificação histórica e servir-nos-á de ponto de partida, sendo, no entanto, um dos objectivos desta obra modificá-la e expandi-la, de modo a reflectir o desenvolvimento da área ao longo dos últimos séculos e a mostrar a opinião de várias escolas sobre o que deveria ser a área de estudo.

As ciências da quantidade e do espaço são, na sua forma mais simples, conhecidas por aritmética e geometria. A aritmética, tal como é ensinada na escola primária, trata de números de várias espécies e de regras de operação sobre números — a adição, a subtracção e outras mais. E trata das situações do quotidiano em que estas operações são utilizadas.

A geometria é ensinada nos níveis seguintes a estes. Trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço. Se desenhar uma linha assim, e outra assim, a que distância ficarão os extremos? Quantos centímetros quadrados há num rectângulo com 4 cm de altura e 8 cm de lar-

gura? A geometria trata também dos aspectos do espaço que possuem um forte apelo estético ou algum elemento de surpresa. Diz-nos, por exemplo, que em qualquer paralelogramo as diagonais se bissectam entre si; que em qualquer triângulo as três linhas medianas se intersectam num ponto comum. Ensina-nos que um plano pode ser pavimentado com triângulos equiláteros ou com hexágonos, mas não com pentágonos regulares.

Mas a geometria, se ensinada segundo o esquema apresentado por Euclides em 300 a. C., possui outra faceta crucialmente significativa. É ser apresentada como uma ciência dedutiva. Partindo de um número de ideias elementares tidas como óbvias, e tendo por base algumas regras bem definidas de manipulação lógica e matemática, a geometria euclidiana desenvolve uma estrutura de deduções de crescente complexidade.

O que é salientado no ensino de geometria elementar não é apenas o aspecto visual ou espacial do tema, mas igualmente a metodologia em que a hipótese conduz à conclusão. Este processo dedutivo é conhecido como *demonstração*. A geometria euclidiana foi o primeiro exemplo de um sistema dedutivo formalizado e tornou-se o arquétipo de tais sistemas. A geometria tem sido o grande campo de treino para o raciocínio lógico, e tem-se considerado (correcta ou incorrectamente) que o estudo da geometria proporciona ao estudante um treino elementar nesse tipo raciocínio.

Embora os aspectos dedutivos da geometria fossem evidentes para os antigos matemáticos, não foram sublinhados no ensino nem na prática da matemática até ao princípio do século XIX. Efectivamente, ainda na década de 50 se ouviam comentários de professores de escolas secundárias, sacudidos pelo impacto da «nova matemática», convictos de que a geometria sempre tivera «demonstração» enquanto a aritmética e a álgebra *não.*

Com o crescente realce dado ao aspecto dedutivo em todos os ramos da matemática, C. S. Peirce anunciou a meio do século XIX que «a matemática é a ciência de inferir conclusões necessárias». Conclusões sobre quê? Sobre quantidade? Sobre espaço? O conteúdo da matemática não é definido por esta definição; a matemática poderia ser «acerca» de qualquer coisa que seja da forma hipótese-dedução-conclusão. Sherlock Holmes comenta com Watson em *The Sign of Four* que «a investigação é, ou deveria ser, uma ciência exacta e deve ser tratada da mesma forma fria e desapaixonada. Você tentou colori-la de romantismo, o que tem um efeito semelhante ao de introduzir uma história de amor ou um romance na quinta proposição de Euclides». Aqui Conan Doyle, ironicamente,

sustenta que a investigação criminal poderia muito bem ser considerada uma ramo da matemática. Peirce concordaria.

A definição de matemática altera-se. Cada geração e cada matemático ponderado na sua geração criaram uma definição segundo o seu entendimento. Examinaremos algumas formulações alternativas antes de darmos este volume por terminado.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

A. Alexandroff; A. Kolmogoroff e M. Lawrentieff; R. Courant e H. Robbins; T. Danzig [1959]; H. Eves e C. Newsom; M. Gaffney e L. Steen; N. Goodman; E. Kasner e J. Newman; R. Kershner e L. Wilcox; M. Kline [1972]; A. Kolmogoroff; J. Newman [1956]; E. Snapper; E. Stabler; L. Steen [1978].

Onde está a matemática?

Onde encontramos matemática? Onde está? Na página impressa, evidentemente, e, antes da imprensa, em tabuinhas ou papiros. Pegue num livro de matemática, tome-o nas mãos — trata-se de um registo palpável da matemática enquanto empreendimento intelectual. Este, todavia, deve existir antes no espírito das pessoas, pois uma prateleira de livros não cria matemática. A matemática existe em gravações de palestras, na memória de computadores e em circuitos impressos. Deveremos também afirmar que reside igualmente em instrumentos matemáticos, como réguas de cálculo, e em caixas registadoras e, segundo crêem alguns, na disposição das pedras em Stonehenge? Deveremos afirmar que reside igualmente nos genes do girassol, uma vez que esta planta dispõe as sementes segundo espirais de Bernoulli e transmite informação matemática de geração em geração? Deveremos afirmar ainda que existe numa parede quando um quebra-luz aí colocado projecta uma sombra parabólica? Ou cremos que tudo isto são manifestações da verdadeira matemática, que, como nos asseguram alguns filósofos, existe eternamente, independentemente desta concretização do universo e de todas as possíveis concretizações de um universo?

Que é o conhecimento, matemático ou outro? Em correspondência com o autor, Sir Alfred Ayer sugere que um dos sonhos directores da filosofia tem sido o de «concordar com um critério para decidir o que existe», a que podemos acrescentar «e para decidir onde isso poderá ser encontrado».

A comunidade matemática

Não há cultura, por mais primitiva que seja, que não demonstre possuir uma espécie rudimentar de matemática. A corrente principal da matemática ocidental como profissão sistemática tem a sua origem no Egipto e na Mesopotâmia. Disseminou-se até à Grécia e até ao mundo greco-romano. Durante os quinhentos anos que se seguiram à queda de Roma, o fogo da criatividade matemática foi praticamente extinto na Europa; pensa-se ter sido conservado na Pérsia. Após alguns séculos de inactividade, a chama surgiu de novo no mundo islâmico, donde se propagou o conhecimento e o entusiasmo matemático, através da Sicília e da Itália, a toda a Europa.

Uma tabela cronológica grosseira para as matemáticas seria:

Egípcia	3000 a. C. a 1600 a. C.
Babilónica	1700 a. C. a 300 a. C.
Grega	600 a. C. a 200 a. C.
Greco-romana	150 d. C. a 525 d. C.
Islâmica	750 d. C. a 1450 d. C.
Ocidental	1100 d. C. a 1600 d. C.
Moderna	1600 d. C. até ao presente

Outras correntes de actividade matemática são a chinesa, a japonesa, a hindu e a inca-asteca. A interacção entre as matemáticas ocidental e oriental é objecto de investigação e especulação académica.

Hoje em dia não há praticamente um único país no mundo que não crie matemática nova. Até mesmo os chamados países em vias de desenvolvimento procuram estabelecer programas actualizados de matemática universitária, sendo a prova de excelência tomada a partir da qualidade da investigação levada a cabo pelo respectivos corpos docentes.

Em contraste com o relativo isolamento das primeiras matemáticas ocidental e oriental, a matemática actual é unificada. Trabalha-se e divulga-se publicamente todo o conhecimento. O secretismo pessoal, como era praticado pelos matemáticos da Renascença e do período barroco, praticamente deixou de existir. Existe, sim, uma ampla rede internacional de publicações periódicas; são organizadas conferências livres de âmbitos nacional e internacional e fazem-se intercâmbios de investigadores e de estudantes.

Com toda a sinceridade, porém, deve admitir-se que foram impostas restrições à livre circulação de informação em tempo de guerra. Existe

também uma literatura importante sobre criptografia matemática que, por razões óbvias, não está à disposição do público em geral.

François Viète
1540-1603

No passado dedicaram-se à matemática pessoas das mais diversas profissões. Thomas Bradwardine (1325) foi arcebispo de Cantuária. Ulugh Beg, criador das tabelas trigonométricas, era neto de Tamerlão. Luca Pacioli (1470) era monge. Ferrari (1548) foi avaliador do fisco. Cardano (1550) foi professor de Medicina. Viète (1580) foi advogado no conselho privado da coroa. Van Ceulen (1610) foi mestre de esgrima. Fermat (1635) foi advogado. Muitos matemáticos ganharam parte do seu sustento como protegidos da coroa: John Dee, Kepler, Descartes, Euler; alguns ostentavam mesmo o título de *mathematicus*. Até por volta de 1600 um matemático podia ganhar umas libras a elaborar horóscopos ou a desenhar amuletos para os endinheirados.

René Descartes
1596-1650

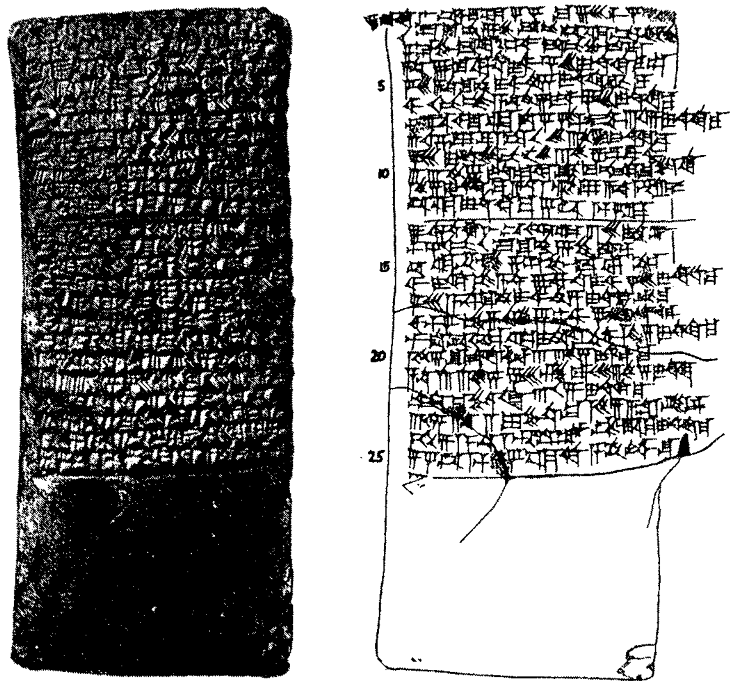
Actualmente nada impede uma pessoa abastada de se dedicar à matemática, a tempo inteiro ou não, em isolamento, tal como acontecia quando a ciência era um passatempo de aristocratas. Contudo, este tipo de actividade não tem agora um potencial suficientemente elevado para manter um bom nível de inovação. Nem a Igreja (nem a coroa) apoiam a matemática como o fizeram outrora.

Durante o último século, as universidades têm sido os nossos principais patrocinadores. Ao libertar algum do seu tempo, a universidade encoraja um professor a encetar investigação em matemática.

Presentemente, a maioria dos matemáticos são apoiados directa ou indirectamente pela universidade, por empresas, como a IBM, ou pelo governo federal, o qual despendeu em 1977 cerca de 130 milhões de dólares com os vários ramos da matemática.

Na medida em que todas as crianças aprendem matemática e uma pequena fracção da matemática faz parte da linguagem comum, a comunidade matemática e a comunidade em geral são semelhantes. A níveis mais elevados do exercício da profissão, ao nível em que a nova matemática é criada e transmitida, somos uma comunidade relativamente diminuta. Na lista conjunta dos membros da American Mathematical Society, da Mathematical Association of America e da Society for Industrial and Applied Mathematics para o ano de 1978 figuram cerca de

30 000 nomes. Não é de modo algum necessário considerar-se matemático para operar aos níveis matemáticos mais elevados; um físico, um engenheiro, um cientista da computação, um economista, um geógrafo, um estatístico ou um psicólogo poderão igualmente fazê-lo. Talvez a dimensão da comunidade matemática americana possa ser calculada em 60 000 ou 90 000 pessoas, com números semelhantes no conjunto de todos os países desenvolvidos ou em vias de desenvolvimento.



Explicação: o desenho é uma reprodução contemporânea dos símbolos inscritos na tabuinha de argila. Ao lado apresenta-se uma tradução das primeiras doze linhas, linha a linha. A notação 3;3,45 utilizada na tradução significa $3 + \frac{3}{60} + \frac{45}{3600} = 3{,}0625$. Expresso na terminologia moderna, o problema apresentado nesta tabuinha é o seguinte: dado $x + y$ e xy, achar x e y. Solução:

$$\begin{matrix} x = \\ \\ y = \end{matrix} \quad \frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy}$$

Um retrato da matemática em 1700 a. C.

Tabuinha de argila com escrita cuneiforme encontrada no Sul do Iraque. Resolvem-se dois problemas seguindo o método normal da matemática babilónica para a resolução de equações quadráticas.

[1] 9 (gín) é a (despesa total em) prata de um kilá; somei o comprimento e a largura e (o resultado foi) 6;30 (GAR); ½ GAR é [a sua profundidade], [2] 10 gín (volume) a tarefa, 6 še (prata) os salários. Qual o seu comprimento (e) a sua largura? [3] Quando efectuar (os cálculos), tome o inverso dos salários, [4] multiplique por 9 gín a (despesa total em) prata (e) terá 4,30; [5] multiplique 4,30 pela tarefa (e) terá 45; [6] tome o inverso da profundidade, multiplique por 45 (e) terá 7;30; [7] tome a metade do comprimento e largura que somei (e) terá 3;15; [8] eleve 3;15 ao quadrado (e) terá 10;33,45; [9] subtraia 7;30 de 10;33,45; (e)[10] terá 3;3,45; tome a sua raiz quadrada (e) [11] terá 1;45; some-o a um, subtraia-o do outro (e)[12] terá o comprimento (e) a largura. 5 (GAR) é o comprimento; ½ GAR é a largura.

Fonte: Prof. A. J. Sachs, in Mathematical Cuneiform Texts, *de Neugebauer e Sachs.*

Têm lugar regularmente numerosas conferências regionais, nacionais e internacionais. Existe uma actividade vigorosa de escrita e publicação de livros a todos os níveis e são editados para cima de 1600 periódicos técnicos aos quais é apropriado submeter material matemático para publicação.

Estas actividades constituem um fórum internacional que perpetua e renova a matemática; em que se discutem as discrepâncias entre prática e significado.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

R. Archibald; E. Bell; B. Boos e M. Niss; C. Boyer; F. Cajori; J. S. Frame; R. Gillings; E. Husserl; M. Kline [1972]; U. Libbrecht; Y. Mikami; J. Needham; O. Neugebauer; O. Neugebauer e A. Sachs; D. Struik; B. Van der Waerden.

As ferramentas do ofício

Que ferramentas auxiliares, ou equipamento, são necessárias à investigação matemática? Há uma imagem famosa que mostra Arquimedes absorto num problema desenhado no areia enquanto soldados romanos espreitam ameaçadoramente ao fundo da cena. Esta imagem permeou o espírito da profissão e ajudou a moldar a sua imagem exterior. Diz-nos que a matemática é feita com um mínimo de ferramentas — um pouco de areia, talvez, e muita massa cinzenta.

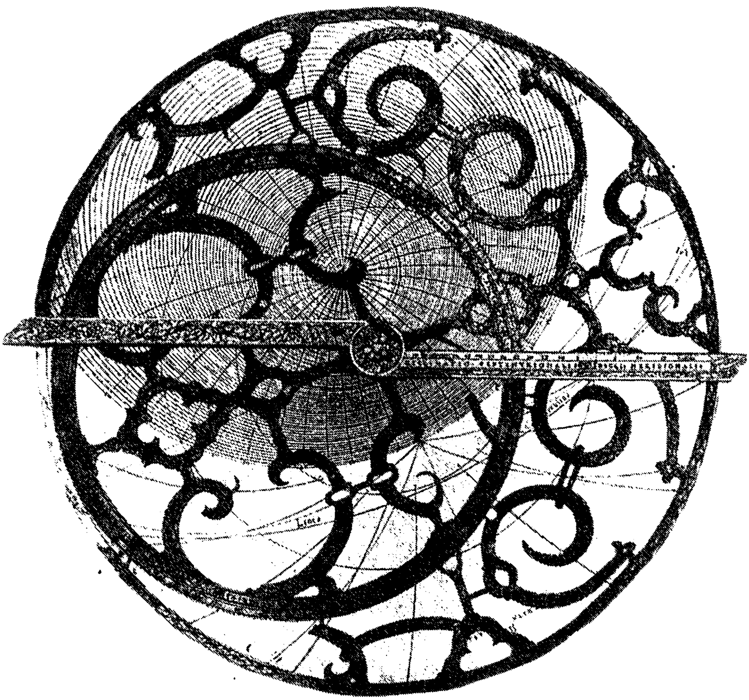
Alguns matemáticos gostam de pensar que a matemática até poderia ser feita dentro de um armário escuro por um homem solitário que recor-

resse aos recursos do seu brilhante intelecto platónico. É verdade que a matemática dispensa grandes quantidades de equipamento laboratorial, que *Gedankenexperimente* (experiências imaginadas) são, em larga medida, o que é necessário. Não é, porém, justo afirmar que a matemática é feita completamente dentro da cabeça.

Em tempos muito recuados, a matemática primitiva, tal como os grandes épicos e as religiões antigas, terá porventura sido transmitida pela tradição oral. Mas cedo se tornou evidente que para fazer matemática era necessário possuir, no mínimo dos mínimos, meios de escrita ou de registo e de duplicação. Antes da invenção da imprensa existiam *fábricas de escribas* para a duplicação de documentos em grande quantidade.

A régua e o compasso estão incorporados nos axiomas em que se baseia a geometria euclidiana. A geometria euclidiana pode ser definida como a ciência daquilo que pode ser construído com régua e compasso.

A aritmética tem sido auxiliada por muitos instrumentos e dispositivos. Três dos mais bem sucedidos têm sido o ábaco, a régua de cálculo



Astrolábio, 1568

e o moderno computador electrónico. E as capacidades lógicas do computador já relegaram para segundo plano as suas aptidões aritméticas.

De início costumávamos contar computadores. Havia quatro: um em Filadélfia, um em Aberdeen, um em Cambridge e um em Washington. Depois havia dez. Então, subitamente, havia duzentos. A última contagem de que se ouviu falar era de 3500. Os computadores profileraram, e uma geração sucedeu a outra, trazendo hoje a calculadora portátil de 50 dólares um poder de cálculo superior ao dos monstros gigantescos que enferrujam agora no Smithsonian: os *Eniacs,* os *Marks,* os *Seacs* e os *Golems.* Talvez o futuro computador de $1,98 inunde os supermercados e se torne um objecto descartável, como a máquina de barbear de plástico ou o lenço de papel.

Conta-se que no fim dos anos 40, quando o velho Tom Watson, da IBM, soube das potencialidades do computador, calculou que dois ou três satisfariam às necessidades de cálculo da nação. Nem ele nem ninguém conseguiu antever como as necessidades matemáticas haveriam de crescer milagrosamente e ocupar por inteiro o poder computacional disponível.

A relação entre os computadores e a matemática tem sido muito mais complexa do que um leigo poderia supor. A maioria das pessoas imagina que quem se intitula matemático profissional se serve de máquinas de cálculo. Na verdade, e em comparação com engenheiros, físicos, químicos e economistas, a maior parte dos matemáticos tem-se mostrado indiferente e ignorante em relação à utilização de computadores. Efectivamente, a ideia de que o trabalho matemático criativo possa vir a ser mecanizado parece a muitos matemáticos degradante para o seu amor-próprio profissional. Naturalmente, para o matemático aplicado, que trabalha com cientistas e engenheiros para obter respostas numéricas para problemas práticos, o computador é desde há muitos anos um ajudante indispensável.

Quando adequadamente programado, o computador possui também a capacidade de realizar muitas operações matemáticas simbólicas. Pode, por exemplo, fazer álgebra formal, cálculo formal, análise matemática formal, expansão formal de séries de potências e trabalho formal em equações diferenciais. Tem-se conjecturado que um programa como o *Formac* ou o *Macsyma* seria um auxiliar valioso para o matemático aplicado. Contudo, isso não tem sucedido por razões que não são completamente evidentes.

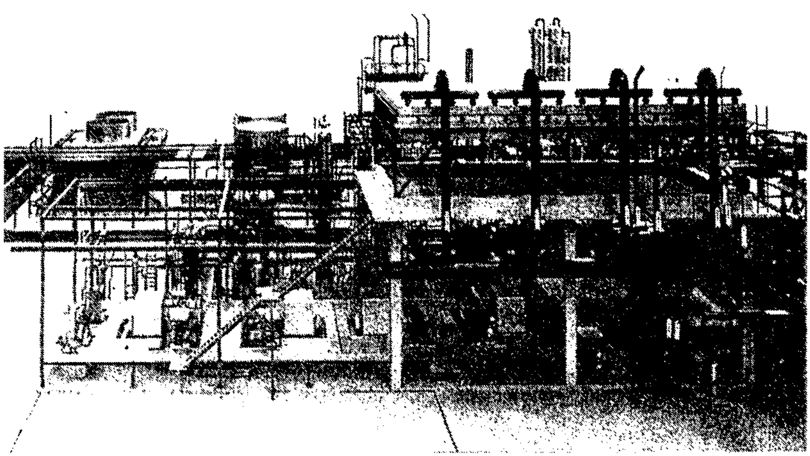
Em geometria, o computador é um instrumento de desenho mais poderoso do que qualquer das pranchetas e escantilhões da sala de desenho tradicional. Os gráficos feitos por computador mostram figuras belamente

sombreadas e coloridas de «objectos» que são definidos apenas matematicamente ou por programação. Um observador poderia jurar que essas imagens são fotografias de objectos reais. Estaria, porém, equivocado; os «objectos» retratados não existem no «mundo real». Em certos casos, de maneira alguma poderiam existir.

Por outro lado, é por vezes mais expedito fazer uso de um modelo físico, em vez de tentar uma modelação através de gráficos feitos por computador. Uma companhia de engenharia química, cuja prática o autor conhece, concebe fábricas para a indústria petroquímica. Estas fábricas possuem tubagens dispostas segundo reticulados muito complexos. É prática comum nessa companhia construir com peças de *lego* uma maqueta à escala e codificada por cores para de seguida fazer o trabalho importante sobre esse modelo físico.

O computador serviu para intensificar o estudo da análise numérica e para acordar a teoria das matrizes de uma modorra de cinquenta anos. Chamou a atenção para a importância da lógica e da teoria das estruturas discretas abstractas. Levou à criação de novas disciplinas, como a programação linear e o estudo da complexidade computacional.

Por vezes, como no caso do problema das quatro cores (v. capítulo 8), foi uma ajuda importante em problemas clássicos até então por resolver, da mesma maneira que um helicóptero salvaria uma carroça de pioneiros de se afundar na lama do rio Pecos. Mas todas estas acções foram laterais. A maior parte da investigação matemática prosseguiu exactamente como o teria feito se a máquina de cálculo não existisse.



Modelo em plástico utilizado por uma empresa de engenharia química
Fonte: The Lummus Co., Bloomfield, N. J.

Nos últimos anos, porém, os computadores têm tido um impacto apreciável sobre a matemática pura. Isto poderá ser o resultado do advento de uma nova geração de matemáticos que aprenderam a programar na escola secundária e para quem um terminal de computador é tão familiar como um telefone ou uma bicicleta. Começa a notar-se uma alteração na investigação matemática. Há um maior interesse por resultados construtivos e algorítmicos e um interesse cada vez menor por resultados existenciais ou dialécticos que pouco ou nenhum significado computacional têm (v. capítulo 4 para uma discussão mais alargada destas questões). O facto de os computadores estarem disponíveis afecta a matemática ao atrair os matemáticos na direcção em que o computador pode desempenhar algum papel. No entanto, é verdade, mesmo hoje, que a maior parte da investigação matemática é levada a cabo sem qualquer uso real ou potencial de computadores.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

D. Hartree; W. Meyer zur Capellen; F. J. Murray [1961]; G. R. Stibitz; M. L. Dertouzos e J. Moses; H. H. Goldstine [1972] [1977]; I. Taviss; P. Henrici [1974]; J. Traub.

Quanta matemática se conhece hoje?

Os livros de matemática da Universidade de Brown estão no 4.º andar da Biblioteca de Ciências. É considerada, no meio, uma colecção admirável de matemática, mostrando uma estimativa aproximada que esse piso contém o equivalente a 60 000 livros de tamanho médio. Há alguma redundância no conteúdo destes volumes e algumas deficiências no património da Universidade de Brown; por isso, admitamos que esses factores se anulam. A este número talvez devamos somar uma quantidade semelhante de material matemático em áreas adjacentes, como a de engenharia, física, astronomia, cartografia, ou em novas áreas de aplicação, como economia. Chegamos, assim, a um total de, digamos, 100 000 volumes.

Cem mil volumes. Esta quantidade de saber e conhecimento está muito para além do entendimento de qualquer pessoa. É, no entanto, diminuta quando comparada com outras colecções, como a de física, medicina, direito ou letras. Durante a vida de um homem contemporâneo, o *todo* da matemática era considerado, no essencial, ao alcance de um estudante

aplicado. O matemático russo-suíço Alexander Ostrowski afirmou certa vez que, quando se apresentou ao exame de admissão na Universidade de Marburgo (por volta de 1915), se esperava que estivesse preparado para responder a qualquer questão em qualquer ramo da matemática.

John von Neumann
1903-1957

A mesma afirmação seria hoje impossível. No fim da década de 40 John von Neumann calculou que um matemático qualificado poderia conhecer, na essência, 10% do material disponível. Há um ditado popular que diz que o «o saber só se ganha, nunca se perde»*. Este ditado subsiste, não obstante juízos tão chocantes como o de A. N. Whitehead, que observou saber-se menos na Europa de 1500 do que na Grécia do tempo de Arquimedes. A matemática fia-se em si própria; é agregativa. A álgebra firma-se na aritmética. A geometria apoia-se na aritmética e na álgebra. O cálculo conta com as três. A topologia é uma extensão da geometria, da teoria dos conjuntos e da álgebra. As equações diferenciais firmam-se no cálculo, na topologia e na álgebra. A matemática é frequentemente descrita como uma árvore robusta, com o tronco, raízes e ramos etiquetados com certas subdisciplinas. É uma árvore que cresce com o tempo.

Desenvolvem-se e concluem-se construções. São criadas novas teorias. São delineados e postos na berlinda novos objectos matemáticos. São descobertas novas relações e interligações, que exprimem, assim, novas uniformidades. São procuradas e concebidas novas aplicações.

Enquanto tudo isto se passa, o que é antigo e verdadeiro é conservado — pelo menos em princípio. Assim, parece que a disciplina é um vasto organismo em crescimento, com ramo sobre ramo de teoria e prática. O ramo anterior é condição prévia para a compreensão do ramo seguinte. Por conseguinte, o estudante sabe que para conseguir estudar e entender a teoria das equações diferenciais já deverá ter tido um curso de cálculo elementar e de álgebra linear. Esta dependência em série contrasta com outras disciplinas, como a arte ou a música. É possível gostar de ou «compreender» arte moderna sem ser versado em arte barroca, assim como criar *jazz* sem qualquer instrução em madrigais do século XVII.

Embora haja muita verdade na imagem da matemática como ciência agregativa, esta noção, tal como é apresentada, é algo ingénua. À medida que as estruturas matemáticas são construídas, outros processos estão

* *Knowledge always adds, never subtracts* no original. *(N. do T.)*

simultaneamente ocupados com a sua destruição. Os factos isolados são declarados incorrectos. As teorias tornam-se impopulares e são abandonadas. As obras entram na obscuridade e transformam-se em material de antiquário (como a multiplicação *prosthaphaeresic**). Outras teorias ficam saturadas e não são levadas adiante. Os trabalhos mais antigos são vistos de perspectivas modernas e são remodelados e reformulados, enquanto a formulação anterior pode mesmo tornar-se ininteligível (os textos originais de Newton são hoje interpretados apenas por especialistas). Algumas aplicações tornam-se irrelevantes e são esquecidas (a aerodinâmica dos zepelins). São encontrados métodos melhores que substituem outros piores (longas tabelas de funções especiais para cálculo são substituídas pelas aproximações implícitas nos circuitos no computador digital). Tudo isto contribui para a diminuição do material que deve ser mantido na vanguarda da consciência matemática.

O conhecimento pode também desaparecer devido à destruição ou deterioração do registo físico. Têm sido destruídas bibliotecas em guerras e em convulsões sociais. E o que não é conseguido pelas guerras pode sê-lo pela química. O papel utilizado nos primeiros tempos da imprensa era muito melhor do que o de hoje. Por volta de 1850 foi adoptado o papel barato, de polpa de madeira e com revestimentos que geram ácidos, podendo as propriedades autodestrutivas dessa combinação, juntamente com a poluição atmosférica, esboroar as páginas de um livro mesmo enquanto se lê.

Quantos livros de matemática deverá conhecer o candidato a doutoramento em Matemática? O candidato médio terá frequentado cerca de catorze a dezoito cursos semestrais de matemática na licenciatura e dezasseis cursos de pós-graduação. Admitindo um livro por curso e duplicando o resultado para incluir leituras complementares e de pesquisa, chegamos a um cálculo aproximado de 60 a 80 volumes. Por outras palavras, bastam duas prateleiras de livros. Esta estimativa está bem dentro do alcance da compreensão humana; tem de estar.

Podemos, por conseguinte, pensar nos nossos 60 000 livros como um oceano de conhecimento, com uma profundidade média de 60 ou 70 livros. Em cada ponto do nosso oceano — ou seja, em diferentes subespecialidades dentro da matemática — podemos tomar uma amostra em profundidade, a prateleira de livros que representaria a instrução elementar de um especialista nessa área. Dividindo 60 000 por 60, descobrimos que deverão existir, pelo menos, 1000 subespecialidades distintas. Contudo, esta estimativa peca por defeito, pois muitos livros apareceriam

* Ou seja, a multiplicação efectuada pela adição de funções trigonométricas.

na lista de livros básicos de mais de uma subespecialidade. A divisão grosseira da matemática, segundo o *esquema de classificação* de 1980 da AMS (MOS), é dada no apêndice *B.* A estrutura pormenorizada mostraria a matemática dividida em mais de 3000 categorias.

Na maior parte dessas 3000 categorias cria-se matemática nova a uma taxa que cresce continuamente. O oceano está em expansão, tanto em profundidade como em largura.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. von Neumann; C. S. Fisher.

O dilema de Ulam

Podemos aplicar a expressão «dilema de Ulam» à situação que Stanislaw Ulam descreveu com vivacidade na sua autobiografia, *Adventures of a Mathematician.*

«Numa palestra que proferi por altura da comemoração do 25.º aniversário da construção do computador de von Neumann em Princeton há alguns anos, dei subitamente comigo a avaliar mentalmente quantos teoremas são publicados anualmente em periódicos de matemática. Fiz um cálculo mental rápido e cheguei a um número semelhante a 100 000 teoremas por ano. Ao mencionar isto, a plateia ficou boquiaberta. No dia seguinte dois dos matemáticos mais jovens da audiência vieram ter comigo para me contarem que, impressionados com este número colossal, tinham empreendido uma pesquisa mais sistemática e pormenorizada na biblioteca do Instituto. Multiplicando o número de periódicos pelo número de edições por ano, pelo número de artigos por edição e pelo número médio de teoremas por artigo, a sua estimativa chegava a quase 200 000 teoremas por ano. Se o número de teoremas é superior ao que qualquer ser humano poderá examinar, a quem poderemos confiar o cargo de juiz do que é 'importante'? Não pode verificar-se a sobrevivência do mais apto se não houver interacção. É difícil acompanhar até mesmo os resultados mais salientes e excitantes. Como poderá conciliar-se isto com a noção de que a matemática sobreviverá como uma ciência una? Em matemática, cada um fica ligado ao seu pequeno campo. Devido a esse facto, o juízo de valor em investigação matemática torna-se cada vez mais difícil, estando a maioria de nós essencialmente a transformar-se em técnicos. A variedade de objectos matemáticos estudados pelos

cientistas mais jovens cresce exponencialmente. Talvez não devamos chamar-lhe poluição de ideias; será porventura uma manifestação da prodigalidade da mesma Natureza que produz um milhão de espécies diferentes de insectos.»

Todos os matemáticos reconhecem a situação que Ulam descreve. Somente do ponto de vista de cada uma das especialidades pode observar-se um padrão coerente de desenvolvimento. Quais são os problemas dominantes? Quais são os progressos recentes mais importantes? É possível responder a estas questões dentro de uma especialidade restrita, tal como, por exemplo, «equações diferenciais parciais não lineares elípticas de segunda ordem».

Porém, colocar a mesma questão num contexto mais amplo é quase fútil por dois motivos distintos. Antes de tudo, raramente haverá alguém que domine os avanços recentes em mais de duas ou três áreas. Uma avaliação global exige a síntese dos juízos de inúmeras pessoas, e algumas serão mais críticas, enquanto outras serão mais complacentes. Mas, mesmo que esta dificuldade não se afigurasse, mesmo que houvesse juízes que conhecessem e compreendessem a investigação em curso em toda a matemática, deparar-se-nos-ia uma segunda dificuldade: não dispomos de critérios estabelecidos que nos permitam avaliar trabalho matemático em campos muito distantes. Tomemos, por exemplo, os campos da propagação de ondas não lineares e da lógica categorial. Do ponto de vista de quem trabalha em cada uma destas áreas, fazem-se progressos de grande importância. É, contudo, duvidoso que alguém saiba o que se passa em ambos estes campos. Seguramente 95% de todos os matemáticos profissionais não entendem nem de um nem de outro.

Nestas condições, uma apreciação justa e um planeamento racional dificilmente serão possíveis. E, de facto, ninguém tenta decidir (num sentido global, que inclua toda a matemática) o que é importante e o que é efémero.

Richard Courant escreveu, há muitos anos, que o rio da matemática, se separado da física, poderia dividir-se em muitos regatos isolados e eventualmente secar por completo. O que aconteceu foi um tanto diferente. É como se as várias torrentes da matemática tivessem transbordado as margens e inundado uma ampla planície, pelo que podemos agora ver inúmeras correntes, separando-se e fundindo-se, algumas bem rasas e desnorteadas. É fácil perder de vista as correntes ainda profundas e caudalosas no meio da confusão.

Os porta-vozes para as agências federais de financiamento são muito explícitos ao negarem qualquer tentativa de avaliação ou de escolha entre as várias áreas da matemática. Se forem feitas mais propostas de inves-

tigação na área x e receberem pareceres favoráveis, então mais serão financiadas. Na ausência de alguém que julgue ter o direito de, ou as habilitações para, fazer juízos de valor, as decisões são tomadas «de acordo com o mercado» ou «pela opinião pública». Contudo, supõe-se que o processo de decisão em democracia é conduzido com controvérsia e debate que criem um eleitorado informado. Em juízos de valor matemáticos, no entanto, não existe praticamente debate nem discussão, e o voto assemelha-se mais ao do consumidor que decide comprar ou não um certo produto. Talvez a economia de mercado clássica e a moderna teoria de *merchandising* possam lançar alguma luz sobre o que sucederá. Não está assegurada a sobrevivência do mais apto, excepto no sentido tautológico de que os que realmente sobreviverem terão assim provado serem os mais aptos — por definição!

Podemos tentar definir critérios racionais pelos quais possamos classificar 200 000 teoremas por ano? Ou devemos simplesmente aceitar que tanto faz sentido escolher entre teoremas como entre espécies de insectos? Nenhuma das direcções é inteiramente satisfatória. Em todo o caso, são tomadas todos os dias decisões acerca do que deve ser publicado e do que deve ser financiado. Ninguém de fora da profissão tem competência para tomar essas decisões; dentro da profissão quase ninguém é competente para as tomar em qualquer contexto mais amplo do que o da sua especialidade. Existem alguns matemáticos excepcionais cujo saber abrange várias especialidades importantes (por exemplo, teoria das probabilidades, combinatória e dos operadores lineares). Juntando um grupo de pessoas assim, é possível formar um conselho editorial para uma publicação importante ou um júri de consultoria para uma agência federal de financiamento. Como chegará tal grupo a uma decisão? Seguramente não será debatendo e chegando a acordo sobre escolhas fundamentais acerca do que é mais valioso e importante na matemática actual.

Verificamos que a nossa própria avaliação sobre o que é valioso em matemática se baseia na nossa noção da natureza e propósito da matemática. Que significa saber algo em matemática? Que tipo de significado se transmite pelas afirmações matemáticas? Assim, problemas inevitáveis do quotidiano da prática da matemática conduzem a questões fundamentais de epistemologia e ontologia, embora a maioria dos profissionais tenha aprendido a desviar-se dessas questões, considerando-as irrelevantes.

Na prática, cada membro do júri tem um compromisso essencial para com a própria área (por mais céptico que seja em relação a todos os outros) e o júri obedece ao princípio político da não agressão ou da indiferença mútua. Cada «área» ou «campo» recebe o seu quinhão, ninguém

tem de justificar a existência do seu campo e todos toleram a existência continuada de vários outros ramos «supérfluos» da matemática.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

B. Boos e M. Niss; S. Ulam; Anon. «Federal Funds...».

Quanta matemática poderá existir?

Com milhares de milhões de *bits* de informação a serem processados automaticamente em cada segundo e 200 000 teoremas matemáticos do tipo tradicional produzidos anualmente, é evidente que o mundo está numa idade de ouro da produção matemática. Se é também uma idade de ouro para ideias novas em matemática, essa é outra questão.

Olhando para o passado, pareceria que a humanidade pode continuar indefinidamente a criar matemática. Todavia, esta pode ser uma apreciação ingénua baseada numa extrapolação linear (ou exponencial), uma apreciação que não considera a diminuição provocada pela irrelevância ou pela obsolescência. E que não considera a possibilidade de saturação interna. E que postula inquestionavelmente o apoio continuado da sociedade.

A possibilidade de saturação interna é curiosa. O argumento é o de que dentro de um modo de expressão ou de operação relativamente limitado há apenas um número muito restrito de formas reconhecidamente distintas e, apesar de ser possível fazer proliferar indefinidamente essas formas, bastam alguns protótipos para exprimir adequadamente a essência desse modo. Por exemplo, embora se diga que não existem dois flocos de neve iguais, é consensual que, do ponto de visto da fruição visual, basta ver alguns para conhecê-los todos.

Em matemática, muitas áreas mostram sinais de esgotamento interno — por exemplo, a geometria elementar do círculo e do triângulo ou a teoria clássica das funções de uma variável complexa. Muito embora a primeira tenha valor como fonte de exercícios técnicos para principiantes e a segunda pelas aplicações a outras áreas, parece improvável que qualquer das duas venha a produzir algo de novo e sensacional dentro das suas fronteiras.

Parece certo que existe um limite para a quantidade de matemática viva que a humanidade pode suportar em cada momento. À medida que novas especialidades matemáticas surgem, outras mais antigas terão de ser abandonadas.

Toda a experiência acumulada até agora parece indicar que existem duas fontes inesgotáveis de novas questões matemáticas. Uma dessas fontes é o desenvolvimento da ciência e tecnologia, que fazem sempre novos pedidos de ajuda à matemática. A outra fonte é a própria matemática. À medida que se torna mais elaborada e complexa, cada novo resultado que se conclui torna-se um potencial ponto de partida para várias novas investigações. Cada par de especialidades matemáticas sem relação aparente apresenta um desafio implícito: encontrar uma ligação fértil entre elas.

Ainda que possa esperar-se a exaustão de cada um dos campos da matemática, e embora o crescimento exponencial da produção matemática esteja destinado a estabilizar mais cedo ou mais tarde, é difícil antever um fim para toda a produção matemática, excepto como parte do fim da procura humana, por mais sabedoria e por mais poder. Talvez um dia possa realmente sobrevir o fim desta procura. Quer esse fim seja triunfal ou trágico, está muito para além de qualquer horizonte hoje visível.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

C. S. Fisher; J. von Neumann.

Apêndice A

BREVE TABELA CRONOLÓGICA ATÉ 1910

2200 a. C.	*Tabuinhas matemáticas de Nippur.*
1650 a. C.	*Papiro de* Rhind: problemas numéricos.
600 a. C.	*Tales:* princípio da geometria dedutiva.
540 a. C.	*Pitágoras:* geometria; aritmética.
380 a. C.	*Platão.*
340 a. C.	*Aristóteles.*
300 a. C.	*Euclides:* sistematização da geometria dedutiva.
225 a. C.	*Apolónio:* secções cónicas.
225 a. C.	*Arquimedes:* círculo e esfera; área do segmento parabólico; séries infinitas; mecânica, hidrostática.
150 a. C.	*Ptolemeu:* trigonometria; movimento planetário.
250	*Diofanto:* teoria dos números.
300	*Pappus:* compilações e comentários; razão cruzada.
820	*al Khowarizmi:* álgebra.
1100	*Omar Khayyam:* equações cúbicas; problemas de calendários.
1150	*Bhaskara:* álgebra.
1202	*Fibonacci:* aritmética, álgebra, geometria.
1545	*Tartaglia, Cardano, Ferrari:* equações algébricas de graus superiores.
1580	*Viète:* teoria das equações.
1600	*Harriot:* simbolismos algébricos.
1610	*Kepler:* poliedros; movimento planetário.
1614	*Nepier:* logaritmos.
1635	*Fermat:* teoria dos números; máximos e mínimos.
1637	*Descartes:* geometria analítica; teoria das equações.

1650 *Pascal:* cónicas; teoria das probabilidades.
1680 *Newton:* cálculo; teoria das equações; gravidade; movimento planetário; séries infinitas; hidrostática e dinâmica.
1682 *Leibniz:* cálculo.
1700 *Bernoulli:* cálculo; probabilidades.
1750 *Euler:* cálculo; variáveis complexas; matemática aplicada.
1780 *Lagrange:* equações diferenciais; cálculo variacional.
1805 *Laplace:* equações diferenciais; teoria planetária; probabilidades.
1820 *Gauss:* teoria dos números; geometria diferencial; álgebra; astronomia.
1825 *Bolyai, Lobatchevsky:* geometria não euclidiana.
1854 *Riemann:* teoria da integração; variáveis complexas; geometria.
1880 *Cantor:* teoria dos conjuntos infinitos.
1890 *Weierstrass:* análise real e complexa.
1895 *Poincaré:* topologia; equações diferenciais.
1899 *Hilbert:* equações integrais; fundamentos da matemática.
1907 *Brouwer:* topologia; construtivismo.
1910 *Russel, Whitehead:* lógica matemática.

BREVE CRONOLOGIA DA MATEMÁTICA CHINESA ANTIGA

Chou Pei Suan Ching [300 a. C. (?)] *(Livro Sagrado da Aritmética):* cálculos astronómicos, triângulos rectângulos, fracções.

Chiu-chang Suan-shu (250 a. C.) *(Aritmética em Nove Secções).*

Lui Hui (250) *Hai-tao Suan-ching (Clássico de Aritmética da Ilha do Mar).*

Anónimo (300), *Sun-Tsu Suan Ching (Clássico de Aritmética de Sun-Tsu).*

Tsu Ch'ung-chih (430-501), *Chui-Shu (A Arte de Remendar):* $\pi = 355/113$.

Wang Hs'iao-t'ung (625), *Ch'i-ku Suan-ching (Continuação da Antiga Matemática):* equações cúbicas.

Ch'in Chiu-shao (1247), *Su-shu Chiu-chang (Nove Capítulos de Matemática):* equações de grau superior; método de Horner.

Li Yeh (1192-1279), *T'se-yuan Hai Ching (O Espelho Marítimo das Medidas no Círculo):* problemas geométricos que conduzem a equações de grau superior.

Chu Shih-chieh (1303), *Szu-yuen Yu-chien (O Precioso Espelho dos Quatro Elementos):* o triângulo de Pascal; soma de séries.

Kuo Shou-ching (1231-1316): calendário *Shou-shih.* trigonometria esférica.

Ch'eng Tai-wei (1593), *Suan-fa T'ung-tsung (Um Tratado Sistemático de Aritmética):* a mais antiga obra existente em que se discute o ábaco.

Ricci e Hsu (1607), *Chi-ho Yuan-pen (Elementos de Geometria):* tradução de Euclides.

Apêndice B

A CLASSIFICAÇÃO DA MATEMÁTICA
COMPARAÇÃO ENTRE 1868 E 1979

Subdivisões do *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1868

História e filosofia	Teoria das funções
Álgebra	Geometria analítica
Teoria dos números	Geometria sintética
Probabilidades	Mecânica
Séries	Física matemática
Cálculo diferencial e integral	Geodesia e astronomia

Trinta e oito subcategorias.

Classificação da matemática em 1979

Geral	Teoria dos números
História e biografia	Teoria dos números algébricos, corpos e polinómios
Lógica e fundamentos	Anéis comutativos e álgebras
Teoria dos conjuntos	Geometria algébrica
Combinatória, teoria dos grafos	Álgebra linear e multilinear; teoria das matrizes
Ordem, reticulado e estruturas algébricas ordenadas	Anéis associativos e álgebras
Sistemas matemáticos gerais	Anéis não associativos e álgebras

Teoria das categorias, álgebra homológica

Teoria dos grupos e generalizações
Grupos topológicos, grupos de Lie

Funções de variáveis reais
Medida e integração
Funções de variável complexa
Teoria do potencial
Várias variáveis complexas e espaços analíticos
Funções especiais
Equações diferenciais ordinárias
Equações diferencias parciais
Diferenças finitas e equações funcionais

Sucessões, séries e convergência
Aproximações e expansões
Análise de Fourier
Análise harmónica abstracta
Transformadas integrais, cálculo operacional
Equações integrais
Análise funcional
Teoria dos operadores
Cálculo variacional e controle óptimo

Geometria
Conjuntos convexos e desigualdades geòmétricas
Geometria diferencial
Topologia geral
Topologia algébrica
Variedades e complexos
Análise global, análise em variedades

Teoria das probabilidades e processos estocásticos
Estatística
Análise numérica
Ciência da computação
Matemática aplicada geral

Mecânica das partículas e dos sistemas
Mecânica dos sólidos
Mecânica dos fluidos, acústica
Óptica, electromagnetismo

Termodinâmica clássica, transferência de calor
Mecânica quântica
Física estatística, estrutura da matéria
Relatividade
Astronomia e astrofísica
Geofísica

Economia, investigação operacional, programação, jogos
Biologia e ciências comportamentais
Sistemas e controle
Informação e comunicação, circuitos, autómatos

Cerca de 3400 subcategorias.

Fonte: *Mathematical Reviews.*

2

A variedade da experiência matemática

A consciência individual e a consciência colectiva

> A cultura como um todo, nas suas várias manifestações, subsiste pela tradição.
> A tradição é o esquecimento das origens.
>
> EDMUND HUSSERL, *The Origin of Geometry*

A quantidade de conhecimento, de prática e de aspiração que hoje se manifesta nos raciocínios e actividades dos matemáticos contemporâneos é limitada. A matemática que mais frequentemente é utilizada, ou que agora está a emergir, faz parte da consciência colectiva. É aquilo que — para usar uma metáfora da ciência da computação — está em memória de acesso rápido. Aquilo que se produz, se pratica e se cria em cada dado momento pode ser visto de duas formas distintas: como parte de uma consciência e de um *milieu** cultural e intelectual mais amplos, parado no tempo, ou como parte de uma corrente de consciência que progride com o tempo.

O que ia dentro da cabeça de Arquimedes era diferente do que ia na de Newton e isto, por sua vez, era diferente do que ia na de Gauss. Não é apenas uma questão de «mais», de Gauss saber mais do que Newton,

---

* Em francês no original. *(N. do T.)*

que, por seu turno, sabia mais do que Arquimedes. É também uma questão de «diferente». O estado actual do conhecimento tece uma rede de motivações e aspirações diferentes, de interpretações e potencialidades diferentes.

Tanto Arquimedes como Newton e Gauss sabiam que a soma dos ângulos de um triângulo perfaz 180°. Arquimedes reconhecia nisso um fenómeno natural, bem como uma conclusão deduzida a partir dos axiomas de Euclides. Newton compreendia aquela afirmação como uma dedução e como uma aplicação, mas podia também ter reflectido sobre a questão de a afirmação poder ser tão verdadeira, tão ligada ao que é justo e certo no universo, que nem Deus todo-poderoso poderia rejeitá-la. Gauss sabia que a afirmação era umas vezes verdadeira e outras falsa, dependendo de como se começasse o jogo da dedução, e perguntava-se que outras estranhas contradições a Euclides poderiam assim ser deduzidas.

Considere-se um exemplo mais simples. A contagem e a aritmética podem ser e foram mesmo conseguidas de diversas formas: com seixos, com ábacos, contas num fio, com os dedos, com lápis e papel, com máquinas de cálculo mecânicas, com computadores digitais portáteis. Cada uma destas formas conduz a uma percepção diferente dos inteiros e a uma diferente relação com aqueles. Se hoje se ouve um clamor contra o facto de as crianças fazerem as contas no computador, os que clamam têm razão ao afirmar que é tudo diferente de quando se fazia (lutava) a aritmética e todos os seus aborrecidos transportes com papel e lápis. Não têm, porém, razão ao pensar que a aritmética a lápis e papel é a ideal e que qualquer substituto é inviável.

Para compreender a matemática de um outro período é necessário estar ciente da consciência pessoal e da consciência colectiva da altura. Esta tarefa é especialmente difícil, pois os textos matemáticos formais e informais que nos chegam não descrevem em qualquer pormenor a rede da consciência. Não é plausível que o significado da matemática possa ser reconstruído apenas com base no registo escrito. Os diálogos que se seguem pretendem transmitir algum conhecimento intuitivo sobre os sentimentos interiores que poderão motivar o envolvimento na matemática.

O matemático ideal

Façamos um retrato do «matemático ideal». Não queremos referir-nos ao matemático perfeito, ao matemático sem defeitos ou limitações. Pre-

tendemos antes descrever o matemático mais típico, tal como poderíamos descrever o galgo ideal, ou o monge do século XII ideal. Tentaremos construir um espécimen improvavelmente puro, de modo a pormos em evidência os aspectos paradoxais e problemáticos do papel do matemático. Em especial, pretendemos mostrar claramente as discrepâncias entre o trabalho e a actividade concreta do matemático e a percepção que ele próprio tem do seu trabalho e actividade.

O trabalho produzido pelo matemático ideal é inteligível apenas para um pequeno grupo de especialistas, totalizando algumas dúzias ou, no máximo, umas centenas. Esse grupo existe há apenas algumas décadas e é possível que se extinga também em poucas décadas. Porém, o matemático vê o seu trabalho como parte da própria estrutura do mundo, contendo em si verdades válidas para todo o sempre, desde o início dos tempos e em qualquer canto remoto do universo.

Deposita a sua fé na demonstração rigorosa; acredita que a diferença entre uma demonstração correcta e uma demonstração incorrecta é inconfundível e decisiva. A pior condenação que consegue imaginar é dizer de um estudante: «Ele nem sabe o que é uma demonstração.» É, porém, incapaz de oferecer uma explicação coerente sobre o que significa rigor, ou sobre o que torna rigorosa uma demonstração. No seu trabalho a distinção entre demonstração completa e incompleta é sempre um tanto difusa e muitas vezes controversa.

Para podermos falar do matemático ideal temos de dar um nome à sua «especialidade», à sua área de trabalho. Chamemos-lhe, por exemplo, «hiperquadrados não-riemannianos».

O matemático é rotulado pela sua especialidade, por tudo quanto publica, especialmente pelos trabalhos que utiliza e de cujos autores segue o gosto na escolha de problemas.

Estuda objectos de cuja existência ninguém suspeita, excepto um punhado dos seus colegas. Na verdade, se quem não é iniciado lhe perguntar o que estuda, será incapaz de o mostrar ou explicar. É preciso passar por uma dura aprendizagem/aprendizado de vários anos até compreender a teoria a que se dedica. Só então o nosso espírito estará preparado para receber a sua explicação. Sem isso, ser-nos-ia dada uma «definição» tão obscura que frustraria qualquer tentativa de compreensão.

Os objectos que o nosso matemático estuda não eram conhecidos antes do século XX; muito provavelmente, não eram conhecidos mesmo há trinta anos. Hoje são o principal interesse na vida de uma dúzia (ou no máximo de umas centenas) dos seus colegas. Ele e os colegas não duvidam, porém, de que os hiperquadrados não-riemannianos têm uma

existência real tão definida e objectiva como a do rochedo de Gibraltar ou a do cometa de Halley. Na verdade, a demonstração da existência dos hiperquadrados não-riemannianos é um dos seus maiores feitos, enquanto a existência do rochedo de Gibraltar é muito provável, mas não rigorosamente demonstrada.

Nunca lhe ocorreu questionar qual é o significado aqui da palavra *existir*. Poder-se-ia tentar descobri-lo examinando-o a trabalhar e observando o que significa a palavra *existir* de um ponto de vista operacional.

De qualquer forma, para ele os hiperquadrados não-riemannianos existem e persegue-os com devoção ardente. Passa os dias a contemplá-los. O sucesso da sua vida é medido pelos factos novos que consiga descobrir sobre eles.

É-lhe difícil travar uma conversa com conteúdo com a grande parte da humanidade que nunca ouviu falar de um hiperquadrado não-riemanniano. Isso cria-lhe sérias dificuldades; no seu departamento há dois colegas que percebem alguma coisa de hiperquadrados não-riemannianos, mas um deles está de sabática e o outro está muito mais interessado em semianéis não-eulerianos. Vai a conferências e faz visitas de Verão a colegas para se encontrar com quem fale a sua língua, quem aprecie o seu trabalho e cujo reconhecimento, louvor e admiração são as únicas recompensas a que pode aspirar.

Nas conferências o tópico principal é habitualmente «o problema da decisão» (ou, porventura, «o problema da construção», ou «o problema da classificação») para os hiperquadrados não-riemannianos. O problema foi inicialmente formulado pelo Prof. Semnome, o fundador da teoria dos hiperquadrados não-riemannianos. É um problema importante porque o professor Semnome, ao formulá-lo, indicou uma solução parcial que, infelizmente, ninguém, a não ser o professor Semnome, conseguiu alguma vez entender. Desde então todos os melhores estudiosos dos hiperquadrados não-riemannianos têm trabalhado nele, chegando a inúmeros resultados parciais. O problema adquiriu, assim, um grande prestígio.

O nosso herói sonha frequentemente tê-lo resolvido. Já por duas vezes se convenceu, em estado de vigília, de que o tinha feito, mas, de ambas as vezes, outros devotos dos hiperquadrados não-riemannianos descobriram uma falha no seu raciocínio, e o problema permanece em aberto. Prossegue, entretanto, na descoberta de novos factos interessantes acerca dos hiperquadrados não-riemannianos. E transmite esses resultados aos colegas especialistas em estenografia/em abreviaturas informais. «Aplicando um operador tangencial ao quase-martingale esquerdo, é possível

ter uma estimativa melhor do que quadrática, vindo, portanto, a convergência no teorema de Bergstein a ser da mesma ordem do grau de aproximação no teorema de Steinberg.»

Este estilo animado/leviano não transparece nos artigos que publica. Aí amontoa formalismo sobre formalismo. Três páginas de definições são seguidas por sete lemas e, finalmente, por um teorema cujas hipóteses ocupam meia página, enquanto a demonstração se reduz essencialmente a «aplicar os lemas 1-7 às definições A-H».

A escrita segue religiosamente uma convenção: dissimular qualquer indício de que o autor ou o futuro leitor são seres humanos. Dá a sensação de que os resultados pretendidos decorrem infalivelmente por meio de um processo totalmente mecânico. Na verdade, ainda não foi feita a máquina de calcular que aceite como entradas as suas definições. Para ler as suas demonstrações é obrigatório partilhar toda uma subcultura de motivações, argumentos e exemplos típicos, hábitos e modos de raciocínio convencionais. Os seus (poucos) leitores conseguem descodificar a apresentação formal, detectar a ideia nova escondida no quarto lema, ignorar os cálculos rotineiros e enfadonhos nos lemas 1, 2, 3, 5, 6 e 7 e perceber o que o autor está a fazer e por que o faz. Contudo, para o principiante, esta é uma escrita codificada cujos segredos nunca conhecerá. Se (Deus nos livre disso) a fraternidade dos estudiosos dos hiperquadrados não-riemannianos algum dia viesse a desaparecer, os textos do nosso herói tornar-se-iam menos compreensíveis de que os dos Maias.

Os problemas de comunicação tornaram-se evidentes quando o matemático ideal recebeu a visita de um funcionário de relações públicas da universidade:

F. R. P. — Agradeço-lhe o tempo que arranjou para falar comigo. A matemática sempre foi a minha pior disciplina.

M. I. — Não tem de quê. Tem o seu dever a cumprir.

F. R. P. — Encarregaram-me de escrever um relatório para a imprensa acerca da renovação da sua bolsa. O normal seria uma única frase: «O professor *X* recebeu uma bolsa de *y* dólares para prosseguir a sua pesquisa sobre o problema da decisão para os hiperquadrados não-riemannianos.» Mas pensei que talvez fosse um bom desafio para mim tentar dar uma ideia melhor acerca do que realmente implica o seu trabalho. Antes de mais, o que é um hiperquadrado?

M. I. — Não gosto nada de dizer isto, mas a verdade é que, se lho dissesse, poderia julgar que estava a tentar humilhá-lo e a fazê-lo passar por estúpido. A definição é um tanto técnica e, simplesmente, não diz muito à maioria das pessoas.

F. R. P. — Será algo que os físicos ou os engenheiros conheçam?

M. I. — Não. Bem, talvez alguns físicos teóricos, muito poucos.

F. R. P. — Mesmo que não consiga dar-me uma verdadeira definição, não consegue dar-me uma ideia acerca da natureza e dos objectivos do seu trabalho?

M. I. — Está bem, vou tentar. Considere uma função suave f num espaço de medida Ω com valores numa folha de germes equipada com uma estrutura de convergência de tipo saturado. No caso mais simples...

F. R. P. — Talvez não esteja a fazer as perguntas certas. Pode dizer-me algo acerca das aplicações da sua investigação?

M. I. — Aplicações?

F. R. P. — Sim, aplicações.

M. I. — Constou-me que já foram feitas algumas tentativas para aplicação dos hiperquadrados não-riemannianos como modelos de partículas elementares em física nuclear. Não sei se houve progressos.

F. R. P. — Houve algum avanço recente na sua área? Alguns resultados excitantes de que se fale muito?

M. I. — Claro, há o artigo de Steinberg-Bergstein. É o maior avanço em pelo menos cinco anos.

F. R. P. — E que fizeram eles?

M. I. — Não lho posso dizer.

F. R. P. — Estou a ver. Acha que o apoio dado à investigação no seu campo é suficiente?

M. I. — Suficiente? Não chega para nada. Está a ser recusado apoio para investigação a alguns dos melhores jovens no campo. Não tenho dúvida de que com mais apoio conseguiríamos avançar muito mais rapidamente no problema da decisão.

F. R. P. — Vê alguma hipótese de o trabalho feito na sua área poder conduzir a algo que seja compreensível pelo cidadão comum deste país?

M. I. — Não.

F. R. P. — E por engenheiros ou por cientistas?

M. I. — Duvido muito.

F. R. P. — Entre os matemáticos puros, estará a maioria interessada ou familiarizada com o seu trabalho?

M. I. — Não, apenas uma pequena minoria.

F. R. P. — Há de todo qualquer coisa que queira dizer sobre o seu trabalho?

M. I. — A frase do costume serve perfeitamente.

F. R. P. — Não quer que o público simpatize com o seu trabalho e o apoie?

M. I. — Claro, mas não se isso significar rebaixar-me.

F. R. P. — Rebaixar-se?

M. I. — Sim, envolver-me em truques publicitários, esse género de coisas.

F. R. P. — Estou a ver. Bem, obrigado mais uma vez pelo seu tempo.

M. I. — Não tem de quê. É o seu trabalho.

Bem, um funcionário de relações públicas. Que poderia esperar-se? Vejamos como se deu o nosso matemático ideal com um aluno que o procurou com uma pergunta estranha:

Alfred Tarski
1902-

ALUNO — Professor, o que é uma demonstração matemática?

M. I. — Não sabe isso? Em que ano está?

ALUNO — No 3.º ano da licenciatura.

M. I. — Incrível! Demonstrações são aquilo que me tem visto fazer no quadro três vezes por semana durante três anos! Uma demonstração é isso.

ALUNO — Desculpe, professor, devia ter explicado. Estou em filosofia, não estou em matemática. Nunca frequentei a sua cadeira.

M. I. — Ah! Bem, nesse caso... teve alguma matemática, não teve? Conhece a demonstração do teorema fundamental do cálculo... ou a do teorema fundamental da álgebra?

ALUNO — Já vi raciocínios em geometria e em álgebra a que chamavam demonstrações. No entanto, não queria exemplos de demonstrações, mas sim uma definição. Se assim não for, como posso saber que demonstrações estão certas?

M. I. — Bem, isso foi tudo esclarecido pelo lógico Tarski, creio, e por alguns outros, talvez Russell ou Peano. De qualquer maneira, o que se faz é escrever os axiomas da teoria numa linguagem formal com uma dada lista de símbolos ou alfabeto. Escreve-se então a hipótese do teorema no mesmo simbolismo. Depois mostra-se que é possível transformar as hipóteses, passo a passo, aplicando as regras da lógica, até chegar à conclusão. Isso é que é uma demonstração.

ALUNO — A sério? É espantoso! Tive cálculo elementar e cálculo avançado, álgebra elementar e topologia e nunca ninguém fez isso.

M. I. — Ah, é claro que nunca ninguém realmente o faz. Nunca mais acabava! Mostra-se apenas que seria possível e isso chega.

ALUNO — Mas nem isso se parece com o que vi fazer nas aulas ou com o que constava dos livros das cadeiras. Portanto, os matemáticos não fazem demonstrações!

M. I. — É claro que fazemos! Se um teorema não é demonstrado, não vale nada.

ALUNO — O que é então uma demonstração? Se é uma coisa com uma linguagem formal e regras de transformação, então nunca ninguém demonstra nada. É preciso conhecer as linguagens formais e a lógica formal antes de fazer uma demonstração matemática?

M. I. — Claro que não! Quanto menos se souber, melhor. São tudo tolices abstractas, de qualquer maneira.

ALUNO — Então o que é realmente uma demonstração?

M. I. — Bem, é um raciocínio que convence alguém que entenda do assunto.

ALUNO — Alguém que entenda do assunto? Então a definição de demonstração é subjectiva; depende de certas pessoas. Antes de poder decidir se algo é uma demonstração sou obrigado a decidir quem são os peritos. Que tem isso que ver com demonstrar coisas?

M. I. — Não, não. Não há nada de subjectivo nisto. Toda a gente sabe o que é uma demonstração. Leia alguns livros, frequente umas aulas com um matemático competente e vai perceber.

ALUNO — Tem a certeza?

M. I. — Talvez não lhe suceda se não tiver nenhuma aptidão para isto. Também pode acontecer.

ALUNO — Então o professor decide o que é uma demonstração, e, se eu não aprender a decidir da mesma maneira, o professor decide que não tenho aptidão.

M. I. — Quem poderá decidir se não eu?

Mais tarde o matemático ideal cruzou-se com um filósofo positivista:

F. P. — Esse seu platonismo é bastante inacreditável. O mais tolo dos alunos de licenciatura já sabe que não deve multiplicar entidades; ora aí não tem apenas um punhado delas, tem-nas numa infinidade não contável. E ninguém sabe nada acerca delas, a não ser o professor e os seus amigalhaços! Quem julga que está a enganar?

M. I. — Não estou em interessado em filosofia. Sou matemático.

F. P. — O professor é tão mau como aquela personagem de Molière que não se apercebia de que falava em prosa! Esteve a cometer um absurdo filosófico com as suas «demonstrações rigorosas de existência». Não sabe que o que existe deve ter sido observado ou, pelo menos, ser observável?

M. I. — Ouça, não tenho tempo para entrar em controvérsias filosóficas. Duvido sinceramente de que os senhores saibam do que estão a falar; de contrário, poderiam enunciá-lo rigorosamente para que eu pudesse entender e verificar o raciocínio. Quanto a ser um platonista, isso é apenas uma figura de estilo conveniente. Nunca julguei que os hiperquadrados existissem. Quando afirmo a sua existência, apenas quero dizer que os axiomas para o hiperquadrado possuem um modelo. Por outras palavras, não é possível inferir deles qualquer contradição formal, e, portanto, segundo a prática matemática corrente, somos livres de postularmos a sua existência. Nada disso tem qualquer conteúdo, é só um jogo, como o xadrez, que jogamos com axiomas e regras de inferência.

F. P. — Não quis ser tão duro consigo. Certamente ajudá-lo-á nas suas investigações imaginar que está a tratar com algo real.

M. I. — Não sou filósofo, a filosofia aborrece-me. Vocês discutem, discutem e nunca chegam a lado algum. O que eu faço é demonstrar teoremas, e não preocupar-me sobre o que possam significar.

O matemático ideal sente-se preparado para, caso a oportunidade surja, entrar em contacto com uma inteligência extragaláctica. A sua primeira tentativa de comunicação seria escrever (ou transmitir de alguma forma) as primeiras centenas de algarismos da expansão binária de π. Parece-lhe óbvio que qualquer inteligência capaz de comunicação intergaláctica será também matemática e que faz sentido discutir a inteligência matemática separadamente dos pensamentos e das acções dos seres humanos. Além disso, considera óbvio que tanto a representação binária como o número real π fazem parte da ordem intrínseca do universo. Nunca admitirá que qualquer deles é um objecto natural, mas insiste em que são descobertos, e não inventados. A sua descoberta é inevitável quando já se evoluiu o suficiente para comunicar com outras galáxias (ou com outros sistemas solares).

O diálogo que se segue teve lugar em certa ocasião entre o matemático ideal e um clássico céptico:

C. C. — Acredita nos seus números e curvas da mesma maneira que os missionários cristãos acreditavam no crucifixo. Se um missionário tivesse ido à Lua em 1500, teria brandido o crucifixo para mostrar aos habitantes lunares que era cristão, esperando que eles mostrassem os seus símbolos*. O professor é ainda mais arrogante com a sua expansão de π.

M. I. — Arrogante? Mas foi verificada até às 100 000 casas decimais!

C. C. — Já vi o pouco que tem a dizer mesmo a um matemático americano que não conheça o seu jogo com os hiperquadrados. Nem sabe como há-de começar a falar com um físico teórico; aliás, consegue tanto ler os artigos deles como eles conseguem ler os seus. Os artigos de investigação no seu campo anteriores a 1910 dizem-lhe tanto como o testamento de Tutancámon. Por que diabo alguém deverá pensar que conseguiria comunicar com uma inteligência extragaláctica?

M. I. — Se não for eu, então quem o conseguirá?

C. C. — Seja quem for! Não serão a vida e a morte, o amor e o ódio, a alegria e o desespero, provavelmente, mais universais do que qualquer fór-

* Cf. o relato da expedição de Coronado a Cibola em 1540: «[...] havia cerca de oitenta cavaleiros na vanguarda, além de trinta e cinco a quarenta peões e um grande número de índios aliados. Na comitiva seguiam todos os sacerdotes, uma vez que nenhum desejava ficar para trás, com o exército. Deveriam tratar com os índios amigáveis com que viéssemos a deparar-nos e eram, em especial, os portadores da cruz, um símbolo que [...] se havia já tornado influente sobre os nativos que encontrávamos a caminho.» (H. E. Bolton, *Coronado,* University of New Mexico Press, 1949.)

mula seca e pedante que ninguém, a não ser o professor e mais umas centenas de colegas seus, reconheceria mesmo que tropeçasse nela?

M. I. — O que torna as minhas fórmulas adequadas à comunicação intergaláctica é o mesmo que as torna pouco propícias à comunicação terrestre. O seu conteúdo não está dependente da Terra. Está livre do que é especificamente humano.

C. C. — Não creio que o missionário dissesse exactamente isso acerca do crucifixo, mas diria, provavelmente, algo semelhante e certamente não menos absurdo e pretensioso.

Os diálogos anteriores não pretendem ser maldosos; na verdade, aplicar-se-iam aos autores. É, todavia, demasiado óbvio, e por isso facilmente esquecido, que o trabalho que, como resultado de uma longa familiaridade, o matemático tem como base é um fenómeno misterioso e quase inexplicável ao observador exterior. Neste caso, o forasteiro poderá ser um leigo, outro docente ou mesmo um cientista que aplique a matemática ao seu trabalho.

O matemático presume normalmente que a imagem que forma de si mesmo é a única que deve ser tomada em consideração. Será que admitiríamos a mesma pretensão a qualquer outra irmandade esotérica? Ou não seria considerada mais fiável uma descrição imparcial proferida por um observador exterior e informado do que a de um participante possivelmente incapaz de notar, quanto mais questionar, as convicções dos seus pares?

Os matemáticos sabem que estudam uma realidade objectiva. Para um leigo parecem estar envolvidos numa comunhão esotérica consigo próprios e com uma diminuta roda de amigos. Como poderá um matemático convencer um leigo céptico de que os nossos teoremas têm significado fora da nossa irmandade?

Se tal pessoa aceitar a nossa disciplina e atravessar os dois ou três anos de estudo pós-graduado em matemática, absorverá o nosso modo de pensar e deixará de ser o leigo crítico que fora outrora. Do mesmo modo, um crítico da cientologia que se submeta a vários anos de «estudo» com «autoridades reconhecidas» em cientologia pode muito bem tornar-se um crente.

É evidente que, se o aluno for incapaz de absorver o nosso modo de pensar, chumbá-lo-emos. Se sobreviver à nossa corrida de obstáculos e depois decidir que os nossos argumentos são pouco claros ou incorrectos, repudiá-lo-emos como um excêntrico ou um inadaptado.

Naturalmente, nada disto prova que estamos errados na percepção de que possuímos um método seguro para a descoberta de verdades objectivas. Devemos, contudo, parar por um momento para nos apercebermos de que, fora do nosso conventículo, muito do que fazemos é incompreensível. É impossível convencer um céptico confiante de que aquilo de que falamos faz sentido, quanto mais de que «existe».

O olhar de um físico sobre a matemática

Com vêem os físicos a matemática? Em vez de respondermos a esta questão resumindo os textos de vários físicos, entrevistámos um físico cujas opiniões científicas julgámos representativas. Uma vez que o sumário que se segue não consegue transmitir completa e fielmente as suas posições, demos-lhe um nome fictício.

O professor William F. Taylor é uma autoridade internacional em ciência da engenharia. Está activamente envolvido no ensino e em investigação e mantém amplos contactos científicos. Em Agosto de 1977 o autor entrevistou o professor Taylor em Wilmington, no Vermont, onde ele e a sua esposa gozavam férias, praticando ténis e assistindo aos concertos Marlboro. Durante a entrevista tentámos não confrontar o entrevistado com posições antagónicas nem entrar em discussão.

O professor Taylor conta-nos que o seu campo se encontra na intersecção da física com a química e com a ciência dos materiais. Não tenta descrevê-lo com uma só palavra. Embora use extensivamente a matemática, diz que não é de maneira alguma um matemático aplicado. Considera, no entanto, que muitas das suas posições seriam apoiadas por matemáticos aplicados.

Taylor faz muitos cálculos. Quando interrogado sobre se se considerava um produtor ou um consumidor de matemática, respondeu que era um consumidor. Acrescentou que a maior parte da matemática que utiliza é do século XIX. Acerca da investigação matemática contemporânea, diz que se sente intelectualmente atraído por ela. Parece unificar uma grande variedade de estruturas complexas. Não se sente, no entanto, suficientemente motivado para aprender o que quer que seja dela por achar que não tem muita aplicação ao seu campo de trabalho. Pensa que muita da matemática que se tem desenvolvido recentemente ultrapassou os limites do que é útil.

Parece conhecer as linhas gerais da recém-desenvolvida análise «não standard». Comenta:

> Esse tema afigura-se-me muito interessante e gostaria de dispor de tempo para o dominar. Surgem várias situações na minha especialidade em que nos defrontamos com fenómenos que ocorrem em simultâneo em várias escalas de comprimento totalmente díspares. São muito difíceis de tratar pelos métodos convencionais. Talvez a análise não standard, com os seus infinitesimais, seja um bom instrumento para atacar esses problemas.

O professor Taylor afirma que no seu trabalho profissional só muito raramente raciocina segundo linhas de pensamento filosófico. Já leu algo

sobre filosofia da ciência e filosofia da física, especialmente em física quântica. Considera particularmente interessantes as questões sobre como e até que ponto o modo de observação perturba os processos. Conta que tais questões exerceram alguma influência sobre o seu trabalho e sobre a sua perspectiva profissional, embora nunca tenha escrito nada de formal sobre isso.

Ainda que a sua familiaridade pessoal com a filosofia da ciência possa considerar-se ligeira, acredita que essa é uma linha de investigação importante, pelo que aceitou a presente entrevista e respondeu ponderadamente e também com prazer. O professor Taylor não está a par das principais questões clássicas da filosofia da matemática. À pergunta sobre se existiria ou teria alguma vez existido uma crise na matemática respondeu que ouvira falar do paradoxo de Russell, mas parecia-lhe ser bastante distante de tudo o que o interessava. «Não é nada que deva preocupar-me», declarou.

A abordagem do professor Taylor à ciência, à matemática e a uma multiplicidade de temas filosóficos afins pode ser resumida dizendo que é um representante forte e eloquente da teoria, ou abordagem, do modelo. Esta teoria sustém que as teorias físicas são modelos provisórios da realidade. Emprega frequentemente a palavra *modelo* e conduz os seus raciocínios para essa abordagem. Segundo ele, a própria matemática é um modelo. Não atribui importância às questões sobre a verdade ou a certeza em matemática, uma vez que todo o trabalho científico de qualquer espécie é sempre de natureza provisória. A questão não deve consistir em se é verdade ou não, mas em se é bom e quão bom é. Na entrevista alongou-se sobre o significado que atribuía a *bom,* fazendo-o do ponto de vista dos modelos.

Como parte da sua exposição, respondeu como se segue. Muitas circunstâncias em física são confusas. Podem conter demasiados fenómenos de igual importância que interagem entre si. Em tais circunstâncias não pode haver qualquer esperança de vir a ser construído algo que possa ser considerado «genuíno». O melhor por que podemos esperar é que um modelo seja uma verdade parcial. É uma tentativa e espera-se que funcione o melhor possível. Todas as teorias físicas são modelos. Um modelo deverá ser capaz de, pelo menos, descrever com precisão razoável um certo fenómeno. Mesmo a esse nível, deparam-se-nos problemas na construção de modelos. Os modelos que se definem dependem claramente do grau de conhecimento que se atingiu. Idealmente, um modelo deverá oferecer previsões. É, pois, inútil construir um modelo que, de tão complexo, se torne inconclusivo. Ser demasiado complexo depende do estado de avanço da matemática e da computação. É, porém, imperioso estar

em posição de inferir consequências matemáticas, e consequentemente físicas, a partir do modelo; se tal se revelar impossível — e isso pode suceder por vários motivos —, então o modelo tem pouco significado.

Foi pedido ao professor Taylor um comentário sobre a posição contemporânea segundo a qual o método científico pode ser resumido pela sequência indução, dedução, verificação, repetida tantas vezes quantas seja necessário. Retorquiu que concordava em linhas gerais, mas que desejava explanar:

> A indução tem a ver com a consciência que tenho das observações de outros e das teorias existentes. A dedução tem a ver com a construção de um modelo e com as conclusões físicas daí inferidas por dedução matemática. A verificação tem a ver com a previsão de fenómenos até aí nunca observados e com a esperança de que os experimentadores procurem fenómenos novos.
>
> O experimentador e o teórico precisam um do outro. O experimentador precisa de um modelo que o ajude a planear as suas experiências. De contrário, não saberá onde procurar. Estará a trabalhar no escuro. O teórico precisa do experimentador para o informar sobre o que se passa no mundo real. De contrário, a sua teorização seria vazia. Deverá existir entre ambos uma comunicação adequada, e creio que, na verdade, existe.

Quando interrogado sobre o que leva à divisão da sua profissão em duas classes — experimentadores e teóricos —, respondeu que, para além da tendência geral no sentido da especialização, será, provavelmente, uma questão de temperamento. «Contudo, a ligação é sempre conseguida — normalmente pelo teórico.»

Perguntámos ao professor Taylor o que achava do comentário muito citado de um certo teórico que disse preferir que as suas teorias fossem belas a que fossem correctas:

> Isso é profundo. Muito profundo mesmo. Mas, da forma como vejo as coisas, não penso que a mera estética compense. Segundo a minha experiência, seria tentado a substituir a palavra *bela* pela palavra *analisável.* Gostaria que os meus modelos fossem belos, eficazes e com poder de previsão. Mas o verdadeiro objectivo é a compreensão de uma situação. Os modelos devem, portanto, ser analisáveis, pois a compreensão apenas pode advir daí. Conseguir as três características é magnífico e raro, mas diria que o meu primeiro objectivo é a possibilidade de análise.

Quais as suas opiniões sobre a demonstração matemática? O professor Taylor conta que os seus artigos raramente contêm demonstrações for-

mais que satisfaçam um matemático. Para ele, as demonstrações não são muito interessantes e são, em larga medida, desnecessárias ao seu trabalho pessoal. Porém, sentia que o seu trabalho continha elementos que poderiam ser descritos sob a forma de raciocínio ou de dedução matemática. A verdade em matemática, afirma, é a argumentação que conduz a relações físicas correctas. As demonstrações empíricas são possíveis. A argumentação verdadeira deve ser passível de se formalizar como demonstração matemática. É agradável quando isso é finalmente feito. A demonstração serve para efeitos cosméticos e para de alguma maneira reduzir a margem de insegurança em que vivemos sempre. Não obstante, envolver-se em demonstrações matemáticas desviá-lo-ia dos seus principais interesses e da sua metodologia.

Tendo em atenção a familiaridade que o professor Taylor tem com os processos computacionais, convidámo-lo a comentar a posição corrente segundo a qual o objectivo da ciência numérica ou da física numérica é o de substituir a experimentação. Reflectiu um pouco e respondeu então:

> Creio ser importante distinguir aqui entre as exigências da tecnologia e as da ciência pura. Às primeiras responderia com um *sim* condicionado; às segundas, com um *não.* Pensemos num problema de tecnologia. Temos um recipiente sob pressão que é sujeito a numerosos ciclos de aquecimento e arrefecimento. A quantos ciclos poderá resistir? Ora, conhecendo o processo que conduz à avaria (e isso não acontece), poder-se-ia dizer que para um caso específico seria muito mais eficiente conduzir uma experiência numérica em computador do que uma experiência real. Essa é uma situação semelhante à de «produção».
>
> Por outro lado, em ciência pura, eliminar a experiência é uma contradição. Descobrimos o que se passa no universo pela experiência. É por aí que surgem novos fenómenos, novos factos.
>
> Não há motivo para que se façam experiências com graves em queda livre num vácuo. A mecânica newtoniana é reconhecida como um modelo adequado. Mas quando passamos, por exemplo, para a cosmologia, onde não sabemos se os modelos existentes são ou não adequados, então a computação numérica não é suficiente.

Questionado sobre se seria concebível uma física teórica sem matemática, o professor Taylor retorquiu que tal seria impossível. Respondendo à mesma pergunta em relação à tecnologia, declarou novamente que seria impossível.

Acrescentou que a matemática da tecnologia é mais elementar e está mais estudada do que a da física moderna, mas que não deixa de ser matemática. O papel da matemática em física ou em tecnologia é o de uma poderosa ferramenta para o raciocínio em situações complexas.

Perguntámos-lhe então por que é tão eficaz a matemática em física e em tecnologia. O nosso entrevistado sublinhou que o termo *eficaz* fora empregado pelo professor Eugene Wigner num conhecido artigo, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences». «Isso tem a ver», continuou,

> com a presente convenção ou sistema de convicções sobre o que constitui a compreensão. Nestas áreas designamos por «compreensível» precisamente aquilo que é explicável ou que é previsível pela matemática. Poder-se-á pensar que isso é andar em círculos, e até talvez seja. A questão é manifestamente irresolúvel, e é assim que desejo formular a minha resposta. Compreender significa compreender pela matemática.

«Exclui outras formas de compreensão?»

Há aquilo que poderá ser designado por compreensão humanista ou intercultural. Tenho lido recentemente Jacques Barzun e Theodore Roszak. Que interesse tão grande é esse pelos números e pelos pontos decimais, parecem estar a perguntar. Sentimos isso no velho poema de Walt Whitman intitulado *The Astronomer.* Whitman ouvira uma palestra sobre astronomia no Cooper Union Hall. Depois da palestra, ao sair, olhando para o céu, sentiu uma certa libertação ao afastar-se da teoria e dos símbolos. Sentiu a satisfação de ser confrontado com a experiência crua, por assim dizer.

Ora, isso pode constituir um ponto de vista válido, mas conduz a um outro resultado final. A ciência quantitativa — isto é, a ciência com matemática — tem-se revelado eficaz na alteração e no controle da Natureza. A maioria da sociedade apoia-a por isso mesmo. Hoje em dia deseja-se a alteração e o controle da Natureza — na medida, é claro, em que o consigamos e em que os resultados sejam felizes. O ponto de vista humanista é um ponto de vista minoritário. Contudo, é influente — vemo-lo entre os jovens. Parece ser de natureza defensiva, mas, por ser um ponto de vista minoritário, a ameaça que constitui para a ciência quantitativa é diminuta.

«Em relação ao conflito dos 'dois mundos', qual dos dois, o cientista ou o humanista, entende melhor o que faz o outro?»

O cientista sabe indiscutivelmente muito mais acerca das humanidades do que o contrário. Os cientistas — ou, pelo menos, muitos que eu conheço — lêem continuamente romances, ensaios, críticas, etc., frequentam concertos, teatros, exposições de arte. Os humanistas muito raramente lêem algo sobre ciência além do que encontram nos jornais. Parte da razão para que tal aconteça prende-se com o facto de que as humanidades assentam no som, na visão e numa linguagem pública e comum. A linguagem dà ciência, com a sua vultosa sublinguagem matemática, apresenta ao humanista uma barreira difícil de transpor.

Os objectivos da sociedade podem naturalmente ser alterados. Se isso acontecer, os objectivos da ciência quantitativa poderão ser enfraquecidos. A ciência e a matemática poderão vir a ser levadas a cabo apenas por uma diminuta, mas empenhada, minoria. Poderá tornar-se impossível fazer disso uma profissão. Tivemos uma pequena indicação neste sentido no fim da década de 60 e no início da de 70.

«Poderá existir conhecimento sem palavras, sem símbolos?»

O conhecimento, tal como o entendo no sentido técnico, implica que possa ser expresso por símbolos. Deslocando-nos para questões humanistas, poder-se-á dizer que um bom escritor evoca uma atmosfera pelo seu uso das palavras. Ou que, quando uma partitura de Mozart é executada, evoca um certo estado mental. Os símbolos verbais e a música são modelos que definem estados mentais.

«Um gato tem conhecimento?»

«Um gato sabe certas coisas. Porém, é um conhecimento de uma espécie diferente. Não podemos falar de conhecimento teórico.»

«Quando uma planta produz uma flor de simetria sêxtupla, está a fazer matemática?»

«Não está.»

«Quer comentar o velho ditado grego segundo o qual Deus é um matemático?»

«Isso não me diz nada. Não é um conceito útil.»

«Que é a intuição científica ou matemática?»

«A intuição é uma expressão de experiência. Experiência adquirida. As pessoas são diferentes em relação a isso. Algumas ganham intuição mais rapidamente do que outras.»

«Até que ponto podemos ser atraiçoados pela intuição?»

«Isso não é raro. É uma parte significativa do meu trabalho. Digo a mim próprio: este modelo parece suficiente, mas de alguma maneira não sinto que o seja. Ou pergunto a mim próprio: será que o meu modelo é melhor do que o dos outros? E, provavelmente, terei de responder com base na intuição.»

A última pergunta que fizemos ao professor Taylor foi sobre se ele é um matemático platonista no sentido de acreditar que os conceitos matemáticos existem num mundo à parte das pessoas que fazem matemática. Respondeu-nos que era, mas num sentido limitado. Não certamente num sentido «teológico». Acredita que certos conceitos se revelam tão superiores a outros que é apenas uma questão de tempo até que esses conceitos prevaleçam e sejam universalmente adoptados. Isto é semelhante a um

processo darwiniano, a sobrevivência das ideias, dos modelos e das construções mais bem adaptadas. A evolução da matemática e da física teórica é semelhante à evolução dos sistemas biológicos.

I. R. Shafarevich e o novo neoplatonismo

Um dos principais investigadores a nível mundial em geometria algébrica é também uma figura proeminente entre os «dissidentes» na ex-União Soviética. I. R. Shafarevich foi mencionado num estudo feito pelo *New York Times* como exemplo de uma tendência que na Rússia vê o cristianismo ortodoxo como um elemento essencial à vida e ao carácter do povo russo.

I. R. Shafarevich

Shafarevich discutiu as suas posições sobre a relação entre a matemática e a religião numa conferência que proferiu quando recebeu um prémio que lhe fora atribuído pela Academia de Ciências de Göttingen, na Alemanha. Citamos dessa conferência:

> Um olhar superficial sobre a matemática pode dar a impressão de que esta resulta dos esforços individuais e independentes de muitos cientistas dispersos pelos continentes e pelas várias épocas. Contudo, o seu desenvolvimento sugere-nos muito mais a obra de uma única inteligência, que se serve da variedade de individualidades humanas somente como instrumento para desenvolver metódica e consistentemente o seu raciocínio. Assemelha-se a uma orquestra que executa uma sinfonia que alguém compôs. Um motivo passa de um instrumento para outro, e, quando um dos participantes é obrigado a largar a sua parte, esta é retomada por um outro e executada com irrepreensível precisão.
>
> Esta não é de forma alguma uma figura de estilo. Na história da matemática existem muitos casos em que a descoberta feita por um cientista permanece incógnita até ser mais tarde reproduzida com precisão admirável por um outro. Na carta que escreveu na véspera do duelo que lhe foi fatal, Galois fez várias afirmações de grande importância acerca dos integrais de funções algébricas. Mais de vinte depois, Riemann, que seguramente nada sabia acerca da carta de Galois, redescobriu e demonstrou as mesmas afirmações. Um outro exemplo: depois de Lobachevski e Bolyai terem lançado as bases da geometria não euclidiana independentemente um do outro, soube-se que outros dois homens, Gauss e Schweikart, também trabalhando independentemente, haviam chegado ambos aos mesmos resultados dez anos antes. Somos assolados por uma sensação curiosa quando observamos os

mesmos padrões, como se desenhados pela mesma mão, no trabalho produzido por quatro cientistas com razoável independência uns dos outros.

Ocorre-nos a ideia de que uma actividade humana tão misteriosa e magnificamente intrigante, uma actividade que tem persistido ao longo de milhares de anos, não pode dever-se a um mero acaso — deve ser guiada por algum desígnio. Tendo reconhecido isto, depara-se-nos inevitavelmente a questão: qual é esse desígnio?

Qualquer actividade despida de um objectivo perde por essa mesma razão o seu sentido. Se compararmos a matemática a um ser vivo, a matemática não nos faz pensar em actividade consciente e intencional. Lembra-nos antes as acções instintivas que são repetidas por reflexo, como resposta a um estímulo interior ou exterior.

Sem um objectivo definido, a matemática não poderá desenvolver qualquer noção sobre a sua própria forma. Tudo o que lhe resta como ideal é o crescimento desgovernado, ou, mais precisamente, a expansão em todas as direcções. Usando outra metáfora, poder-se-á dizer que o desenvolvimento da matemática é distinto do crescimento de um ser vivo, pois este preserva a sua forma e define a sua fronteira enquanto cresce. Este crescimento assemelha-se muito mais ao crescimento de um cristal ou à difusão de um gás, que se expande livremente até encontrar um obstáculo exterior.

Dois mil anos de história convenceram-nos de que a matemática é incapaz de formular por si própria esse objectivo final que poderá orientar o seu progresso. Terá, pois, de encontrá-lo no exterior. Nem é preciso dizer que estou longe de tentar indicar a solução para este problema, que é não só o problema interno da matemática, mas é também o problema da humanidade em geral. Quero tão-somente apontar as principais direcções para a procura dessa solução.

Existem, aparentemente, duas direcções possíveis. Em primeiro lugar, pode tentar-se extrair o objectivo da matemática das suas aplicações práticas. É, porém, difícil acreditar que uma actividade superior (espiritual) possa encontrar as suas justificações na actividade inferior (material). No *Evangelho segundo S. Tomé,* descoberto em 1945*, Jesus diz ironicamente:

Se a carne veio pelo espírito,
é um milagre. Mas, se o espírito
veio pela carne — então é um milagre dos milagres.

---

*O *Evangelho segundo S. Tomé* é, provavelmente, o mais significativo dos livros descobertos na década de 40 em Nag Hammadi, no Egipto. É uma compilação dos «ditos de Jesus» colocada num contexto gnóstico. O gnosticismo afirma a existência de conhecimento secreto *(gnose)* pelo qual pode obter-se a salvação e que esse conhecimento é superior à fé ordinária. [V. R. M. Grant, «Gnosticism, marcion, origen», in *The Crucible of Christianity,* A. Toynbee (ed.), Londres, Thames and Hudson, 1969.]

> A história da matemática mostra convincentemente que tal «milagre dos milagres» é impossível. Se prestarmos atenção ao momento decisivo no desenvolvimento da matemática, ao momento em que se deu o primeiro passo e em que o chão em que se firma conheceu existência — refiro-me à demonstração lógica —, veremos que isso foi conseguido com matéria que na realidade excluía a possibilidade de aplicação prática. Os primeiros teoremas de Tales de Mileto demonstravam enunciados evidentes para qualquer homem sensato — que, por exemplo, um diâmetro divide um círculo em duas partes iguais. O génio foi preciso, não para se convencer da correcção desses enunciados, mas para compreender que careciam de demonstração. O valor das descobertas é, obviamente, nulo.
>
> Para terminar, queria exprimir a esperança de que [...] a matemática possa servir de modelo para a solução do maior problema da nossa época: descobrir um objectivo religioso supremo e alcançar o significado da actividade espiritual humana.

Assim falou Shafarevich — uma declaração surpreendente a sair dos lábios de qualquer matemático contemporâneo, dentro ou fora da Rússia. Não é, contudo, uma declaração nova. Os filósofos gregos viam a matemática como uma ligação entre a teologia e o mundo físico e perceptível, e essa visão foi realçada e desenvolvida pelos neoplatonistas. Julgava-se que o quadrívio (aritmética, música, geometria e astronomia), já conhecido de Protágoras (m. 411 a. C.), pretendia elevar o espírito através da matemática até à esfera celeste, onde os movimentos eternos seriam a forma perceptível da alma terrena.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

P. Merlan; I. R. Shafarevich.

Heterodoxias

Há uma experiência pela qual a maioria dos matemáticos já passou, e pela qual passam frequentemente aqueles cujas actividades estão mais sob o olhar do público: recebe-se uma carta inesperada vinda de um indivíduo desconhecido e que contém uma peça de matemática de natureza sensacional. O remetente pretende ter resolvido um dos grandes problemas matemáticos por esclarecer ou ter refutado uma verdade matemática comum.

Tempos houve em que a quadratura do círculo foi uma actividade predilecta; na verdade, a actividade é tão antiga que já Aristófanes parodiava aqueles que se dedicavam à quadratura do círculo. Em tempos mais recentes as demonstrações do «último teorema» de Fermat têm-se revelado muito populares. O autor de uma dessas cartas é tipicamente um amador, com muito pouca formação em matemática. Tem muito frequentemente uma compreensão fraca da natureza do problema que está a atacar e uma noção imperfeita do que, afinal, é uma demonstração matemática e de como funciona. O autor é geralmente um homem, muitas vezes reformado e com tempo livre para se dedicar aos seus interesses em matemática, que atingiu frequentemente um estatuto profissional apreciável na comunidade e ostenta os seus símbolos de *status* no próprio trabalho matemático.

Muitas vezes o correspondente não só conseguiu «decifrar» um dos grandes mistérios da matemática, como encontrou também maneira de construir um escudo antigravidade, de interpretar os segredos da grande pirâmide e de Stonehenge, e está a caminho de fabricar a pedra filosofal. Sem exagero.

Se o destinatário de tal carta responder, encontrar-se-á geralmente envolvido com uma pessoa com quem não consegue comunicar cientificamente e que mostra muitos sintomas de paranóia. É fácil aprender a reconhecer de vista esses correspondentes e a deixar as suas cartas por responder, aumentando assim, infelizmente, a paranóia.

Enquanto escrevo, tenho sobre a secretária um artigo desse género que me foi entregue pelo editor de um dos principais periódicos de matemática dos Estados Unidos. Para protecção própria, alterarei alguns dos pormenores pessoais, mantendo o tom o melhor que consiga. O artigo está cuidadosamente impresso em papel *couché* caro e vem das Filipinas. Está escrito em espanhol e pretende ser uma demonstração do último teorema de Fermat. Há também uma fotografia do autor, um senhor ilustre dos seus 80 anos que foi general do exército filipino. A acompanhar a matemática vem uma extensa autobiografia do autor. Parece que os seus antepassados eram aristocratas franceses, que depois da Revolução Francesa o irmão mais novo foi enviado para o Oriente, donde a família se encaminhou para as Filipinas, etc. Incluídas também no artigo sobre o teorema de Fermat estão três belas gravuras dos três últimos Luíses reinantes em França e um longo apelo à restauração da dinastia de Bourbon. Depois da primeira página, a matemática cai rapidamente na incompreensibilidade. Gastei dez minutos com este artigo; o editor típico gastaria ainda menos. Porquê? O «último teorema» de Fermat é, à data em que escrevo, um dos grandes problemas por resolver.

Talvez o senhor das Filipinas o tenha resolvido. Porque não li com cuidado o seu artigo?

Há diversos géneros de textos anómalos e idiossincráticos em matemática. Como poderá a comunidade joeirar aquilo que quer? Como poderá reconhecer o talento, o génio, a excentricidade, a loucura? Qualquer pessoa pode errar com honestidade. Pouco depois do fim da Segunda Guerra Mundial, o professor Hans Rademacher, da Universidade da Pensilvânia, uma autoridade mundial em teoria dos números, julgou ter demonstrado a conhecida hipótese de Riemann. Os jornais tomaram conhecimento disso e foi publicada uma notícia na revista *Time*. Não é frequente uma descoberta matemática chegar à imprensa popular. Porém, foi descoberto pouco depois um erro no trabalho de Rademacher. O problema continua em aberto enquanto escrevo estas linhas.

Este é um exemplo de incorrecção produzida dentro das fronteiras da ortodoxia matemática — e também aí detectada. Está sempre a acontecer aos melhores de entre nós. Quando o erro é apontado, reconhecemo-lo como tal e agradecemos. Estas situações ocorrem regularmente.

No extremo oposto está o género cuja psicopatologia se descreveu acima. Este género de trabalhos é normalmente rejeitado à primeira vista. A probabilidade de que contenha algo de interessante é extremamente baixa e esse é um risco que a comunidade matemática está disposta a correr. Porém, nem sempre é fácil estabelecer um limite entre o excêntrico e o genial.

Srinivasa Ramanujan 1887-1920

Um pobre e obscuro homem de um lugar desconhecido na Índia escreve em 1913 uma carta a G. H. Hardy, o maior matemático britânico do seu tempo. A carta denuncia sinais de formação inadequada, é intuitiva e desorganizada, mas Hardy descobre nela pérolas matemáticas brilhantes. O nome desse indiano era Srinivasa Ramanujan. Se Hardy não tivesse obtido uma bolsa de estudos para Ramanujan, uma quantidade de matemática muito interessante ter-se-ia perdido para sempre.

Há também o caso de Hermann Grassmann (1809-1877). Em 1844 Grassmann publicou um livro intitulado *Die lineale Ausdehnungslehre.* Esta obra é hoje considerada genial. Antecipa o que foi depois definido como a análise tensorial e vectorial e as álgebras associativas (os quaterniões). Mas, por as explicações de Grassmann terem sido obscuras, místicas e extraordinariamente abstractas, o seu trabalho desagradou à comunidade matemática e foi ignorado durante muitos anos.

Menos conhecida do que a de Grassmann ou a de Ramanujan é a história de Jozef Maria Wronski (1776-1853), cuja personalidade e génio combinavam elementos que iam desde a ingenuidade pretensiosa até ao génio que raiava a loucura. Hoje Wronski é principalmente lembrado por uma certa determinante $W[u_1, u_2, ..., u_n] =$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

formado a partir de n funções $u_1, ..., u_n$

Esta determinante está relacionada com teorias de independência linear e é importante para o estudo da teoria das equações diferenciais lineares. Todos os estudantes de equações diferenciais já ouviram falar do wronskiano.

Wronski foi um polaco que combateu ao lado de Kosciuszko pela independência da Polónia, tendo, no entanto, dedicado o seu livro, *Introduction à la philosophie des mathématiques et technie de l'algorithmie,* a Sua Majestade Alexandre I, autocrata de todas as Rússias. Um realista político, presume-se.

Em 15 de Agosto de 1803, Wronski teve a revelação que lhe permitiu conceber «o absoluto». O seu trabalho matemático e filosófico posterior foi conduzido pela vontade de expor o absoluto e as suas leis unificadoras. Além da sua filosofia e matemática, Wronski dedicava-se à teosofia, ao messianismo político e cultural (escreveu cinco livros sobre este tema), promoveu as ideias do aritmosofismo, do vitalismo matemático e de algo a que chamava «sechelianismo» (do hebreu *sechel* = razão). Este último pretendia transformar o cristianismo de religião revelada em religião demonstrada. Wronksi distinguia três forças que controlariam a história: a providência, o destino e a razão. Baseou quase todo o seu sistema na negação do princípio da inércia. Não existindo inércia no mundo material, este não poderia competir com o mundo espiritual. O ideal científico seria uma espécie de panmatematismo que unificaria o conhecimento da formação dos sistemas matemáticos com as leis que governam os seres vivos.

A filosofia de Wronski é, aparentemente, pouco interessante e apresenta semelhanças com os últimos escritos de Bergson.

Que encontramos de matemático ao abrirmos o primeiro volume das suas *Oeuvres mathématiques?*

Parece ser, num relance rápido, uma mistura de teoria de séries infinitas, equações de diferenças, equações diferenciais e variáveis complexas. É extenso, palavroso, polémico, enfadonho, obscuro, egocêntrico e repleto de interpolações filosóficas que resultam em esquemas unificadores. A «grande lei da geração de quantidades», que contém a chave do universo, surge como equação (7). Wronski vendeu-a a um banqueiro rico. O banqueiro não lha pagou e Wronksi manifestou publicamente o seu desagrado. Eis a grande lei:

A chave de Wronski para o universo; colocada numa cártula, consagrada pelo zodíaco, vigiada por uma esfinge e impressa em todas as suas obras

$$Fx = A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3 + A_4\Omega_4 + \text{etc.}$$
$$\text{ao infinito}$$

Que significa? Parece ser um esquema geral de expansão de funções como combinação linear de outras funções, uma espécie de expansão de Taylor generalizada que contém todas as expansões passadas e todas as expansões futuras.

Não me é possível captar a essência da obra de Wronski; apenas um estudioso dedicado da matemática do século XVIII poderá apontar o que há de novo ou de interessante, se é que existe, nesses quatro volumes. Aceito de bom grado o veredicto histórico de que Wronski merece apenas ser lembrado pelo wronskiano. As portas do passado matemático estão muitas vezes enferrujadas. Não é por uma câmara secreta ser de acesso difícil que aí encontraremos um tesouro.

Há, portanto, trabalho que está errado, que é reconhecido como errado e que é posteriormente corrigido. Há trabalho que é repudiado sem análise prévia. Há trabalho que de tão obscuro se torna difícil de interpretar e que é necessariamente ignorado. Parte desse trabalho pode reaparecer mais tarde. Há trabalho que pode ser de grande importância — como o foi a teoria dos conjuntos de Cantor —, que é heterodoxo e que, como resultado disso, é ignorado ou boicotado. Há também trabalho, porventura o grosso da produção matemática, que está declaradamente certo, mas que é ignorado a longo prazo por falta de interesse ou porque as correntes principais da matemática não decidiram por aí passar. Em última análise, não é possível formalizar sobre o que está certo, como sabemos que está certo, o que é aceite e qual é o mecanismo de aceitação. Como escreveu Hermann Weyl, «fazer matemática pode muito bem ser uma actividade humana criativa [...] cujas decisões históricas desafiam uma racionalização objectiva completa».

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. M. Wronksi.

O indivíduo e a cultura

Nunca a relação entre o indivíduo e a cultura foi tão discutida. As tendências antagónicas da amalgamação e da fragmentação, do nacionalismo e do regionalismo, da liberdade do indivíduo e da segurança dentro de um grupo maior estão a representar no palco da história a peça que poderá decidir o rumo da civilização para os próximos séculos. Perpendicularmente a estas batalhas dá-se o conflito entre as «duas culturas»: a humanista e a tecnológica.

A matemática, como actividade humana que é, incorpora em si todas as quatro componentes. Tem muito a ganhar com o génio individual, mas o seu desenvolvimento depende da aprovação tácita da comunidade. Como grande forma de arte, é humanista; é científico-tecnológica nas aplicações.

Para compreender como e onde se encaixam a matemática e a condição humana é importante dar atenção a todas estas componentes.

Existem duas posições radicais acerca da história da descoberta. A primeira posição mantém que o génio individual é o manancial da descoberta. A segunda posição é a de que as forças sociais e económicas geram a descoberta. A maioria das pessoas não apoia nem uma posição nem outra nas suas formulações mais puras, procurando antes encontrar um ponto intermédio que seja compatível com a sua experiência.

A doutrina do indivíduo é a mais conhecida das duas, a mais acessível, e sentimo-nos mais à vontade com ela. Como professores, fazemos o nosso melhor por nos concentrarmos no aluno enquanto indivíduo; não tentamos ensinar à multidão. Todos os métodos de ensino em massa, qualquer que seja o meio de que façam uso, postulam o indivíduo como receptor. Pelo contrário, a palavra *doutrinação,* sugerindo um fenómeno de grupo, preocupa-nos.

Estudamos a didáctica da matemática e as estratégias da descoberta, como nos livros de Pólya (v. capítulo 6), e procuramos transmitir aos nossos alunos algumas das ideias penetrantes de um grande matemático. Lemos biografias de grandes génios e estudamos com cuidado os seus trabalhos.

Um enunciado notável da doutrina do indivíduo na matemática foi apresentado num artigo de Alfred Adler. O autor é um matemático pro-

fissional e o seu artigo é tão eloquente como dramático. É também uma declaração muito pessoal; as suas opiniões são romantizadas, maníaco--depressivas e apocalípticas.

Adler principia por apresentar a defesa de uma forma extrema de elitismo:

> Cada geração tem alguns, poucos, grandes matemáticos, e a matemática nem notaria a ausência de todos os outros. São úteis como professores, e a sua investigação não prejudica ninguém, mas não têm qualquer valor. Um matemático ou é grande ou não é nada.

Isto é acompanhado pela declaração dos «felizes eleitos»:

> Contudo, nunca poderão subsistir dúvidas acerca de quem é e de quem não é um matemático criativo; portanto, tudo o que há a fazer é seguir as actividades destes homens.

«Os eleitos» — ou, pelo menos, cinco de entre eles — são então identificados (à data de 1972). Faz-se notar que a criação de matemática é assunto para jovens:

> A vida profissional de um matemático é curta. O trabalho raramente melhora depois dos 25 ou dos 30 anos de idade. Se pouco até aí foi conseguido, pouco será conseguido depois. Se foi atingida a grandeza, então continuará a surgir trabalho de boa qualidade, embora o nível de realização decaia em cada década.

Adler relata a intensa alegria do artista:

> Um resultado matemático novo, completamente novo, nunca antes conjecturado ou compreendido por ninguém, acarinhado desde as primeiras hipóteses esperançosas ao longo dos labirintos das demonstrações goradas, das abordagens erradas, das direcções pouco prometedoras e de meses ou anos de trabalho difícil e delicado — nada, ou quase nada, neste mundo pode provocar uma sensação semelhante de poder e de tranquilidade ao seu criador. E um grande e novo edifício matemático é um triunfo que sussurra palavras de imortalidade.

Adler remata com um *Götterdämmerung** matemático:

> É constante a consciência do passar do tempo, de que a criatividade matemática termina cedo na vida e de que a obra importante, a ser concluída,

* Crepúsculo dos deuses (alemão no original). *(N. do T.)*

deve ter início cedo e progredir rapidamente. Concentra-se nos problemas de maior dificuldade, pois a disciplina não perdoa o desprezo pela solução de problemas triviais e a indiferença pela solução de quase todos os problemas, excepto os mais difíceis e profundos.

Mais ainda: a matemática produz um impulso, de tal maneira que qualquer resultado novo aponta imediatamente para um outro ou para vários outros resultados novos. E assim segue — segue até que o impulso se desvaneça por completo. A carreira matemática está então essencialmente terminada; as frustrações permanecem, mas as satisfações desapareceram.

E, assim, deixamos o nosso herói envelhecido a bater esperançosamente aos portões de uma Valhalla que pode ser, ela mesma, uma ilusão.

Para que nenhum leitor se deixe desencorajar de prosseguir uma carreira matemática por esta descrição desoladora, devemos dizer que existem muitos casos de matemáticos que continuam a produzir investigação matemática de primeira água depois dos 50 anos; por exemplo, Paul Lévy, um dos criadores da moderna teoria das probabilidades, tinha quase 40 anos quando escreveu o seu primeiro artigo nessa área e continuou a produzir trabalho profundo e original mesmo depois dos 60 anos.

Quando falamos da cultura como sendo a principal fonte de descoberta, estamos em terreno muito mais frágil, que é muito mais incompreendido. Esta é tese dos «muitos». Este é o *Zeitgeist* de Hegel, o espírito da época: as ideias, as atitudes, as concepções, as necessidades e os modos de auto-expressão que são comuns a um tempo e um local. É o que está «no ar». Leia-se o último capítulo, retrospectivo, da *Guerra e Paz* de Tolstoi para se ver como ele conclui que as tendências iniciadas na Europa pela Revolução Francesa se teriam desenvolvido com ou sem Napoleão. Os teóricos marxistas inclinam-se para o favorecimento da doutrina da cultura. Assim, por exemplo, pode ler-se como o cientista e marxista britânico J. D. Bernal o mostra para as ciências da Natureza.

Temos o pressentimento de que a cultura é determinante. Sabemos que existem culturas em que a música sinfónica prosperou e outras em que isso não sucedeu. Porém, a explicação pela cultura não surge facilmente. O registo deixado por um só homem é lido com maior facilidade do que os vestígios de toda uma civilização. Como conseguiu a pequena nação húngara produzir um tão grande número de matemáticos de primeira qualidade? Porque têm os governos desde 1940 apoiado a investigação matemática, se até então não o faziam? Porque julgavam os primeiros cristãos que Cristo era incompatível com Euclides se, mil anos depois, Newton pôde abraçar ambos?

No que diz respeito à história contemporânea, para a qual os factos estão ainda frescos nas memórias e os principais intervenientes poderão ainda estar vivos, será fácil escrever convincentemente sobre os motivos culturais por detrás deste ou daquele fenómeno. Assim, por exemplo, será porventura possível — e muito proveitoso — explicitar as forças extramatemáticas e extratecnológicas que conduziram no curto espaço de uma geração ao desenvolvimento do computador electrónico (v. o livro de H. Goldstine). Seria muito mais difícil dar uma explicação semelhante para a ascensão das álgebras de funções. Quando se trata do passado longínquo, reconstrói-se a história por inferência ou estatística tão bem quanto nos seja possível. Uma disciplina completamente nova acabou de surgir, a cliometria — o tratamento matemático de registos históricos. Porém, o que surge daí são o mais das vezes romantizações fabricadas, sobressimplificações e erros de interpretação.

Estranhamente, a doutrina da cultura sai reforçada pela perspectiva platónica da matemática. Se, no fim de contas, $e^{\pi i} = -1$ é um facto universal, uma verdade imutável, existindo para todo o sempre, então a sua descoberta por Euler terá sido seguramente acidental. Euler não foi mais do que o meio através do qual esse facto se manifestou. Mais cedo ou mais tarde, pelo mesmo raciocínio, seria inevitável a sua descoberta por um qualquer de entre outros cem matemáticos.

Nenhuma das duas posições extremas aqui apresentadas é adequada. Porque ficou a matemática adormecida durante, pelo menos, oitocentos anos, desde cerca de 300 até 1100? Certamente os genes do génio matemático estavam tão presentes nos habitantes do Mediterrâneo do ano 600 como o estavam nos dias de Arquimedes. Ou então considere-se a filosofia histórica de Tolstoi. Não obstante a relegação de Napoleão para a não-necessidade histórica, tudo quanto há de interessante em *Guerra e Paz* decorre da percepção dos indivíduos na sua unicidade. Apesar do pendor dos marxistas para as explicações culturais, a relevância de V. I. Lenine na revolução russa não lhes serve apenas de objecto de contemplação silenciosa.

Em última análise, a dicotomia entre a doutrina do indivíduo e a doutrina da cultura é uma falsa dicotomia, um pouco como a discussão sobre a mente e matéria ou sobre o espírito e a carne. A reconciliação destas posições extremas foi já tentada de várias formas. Pode tentar-se a reconciliação pelas escalas de tempo. Segundo este ponto de vista, a curto prazo (digamos, menos de quinhentos anos), o indivíduo é relevante. A longo prazo (digamos, mais de quinhentos anos), o indivíduo perde a relevância, mas ganha-a a cultura.

Foi proposto pelo psicólogo e filósofo americano William James um ponto de vista intermédio muito atraente. No seu ensaio *Great Men and Their Environment,* James escreve:

> A comunidade estagna sem o impulso do indivíduo; o impulso morre sem o apoio da comunidade.

Ora, esta é uma forma muito simples e sóbria de declarar aquilo que deve parecer óbvio à maioria dos observadores: ambos os elementos são indispensáveis. Fui criado numa cidade de indústria têxtil e tenho a minha visão pessoal da síntese de James. O tecido é constituído por dois conjuntos perpendiculares de fios entrelaçados: a trama e a teia. Nenhum deles se mantém sem o outro. Analogamente, a teia da sociedade requer a trama do indivíduo.

Tendo resumido a posição de James sobre este assunto com esta pequena citação, podemos agora levantar outra questão:

> *Será possível escrever uma história da matemática segundo as linhas sugeridas por esta citação?*

Seria bom pensar que sim, mas tal ainda não foi feito e não é nada certo que alguma vez o seja.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

A. Adler; J. D. Bernal; S. Bochner [1966]; P. J. Davies [1976]; B. Hessen [Para uma resposta, v. G. N. Clark; W. James [1917], [1961]; M. Kline [1972]; T. S. Kuhn; R. L. Wilder [1978].

A relação da sociedade com as ciências físicas tem sido mais estudada do que com a matemática. Há alguns livros que exploram este assunto: A. H. Dupree; G. Basalla; L. M. Marsak; J. Ziman.

3

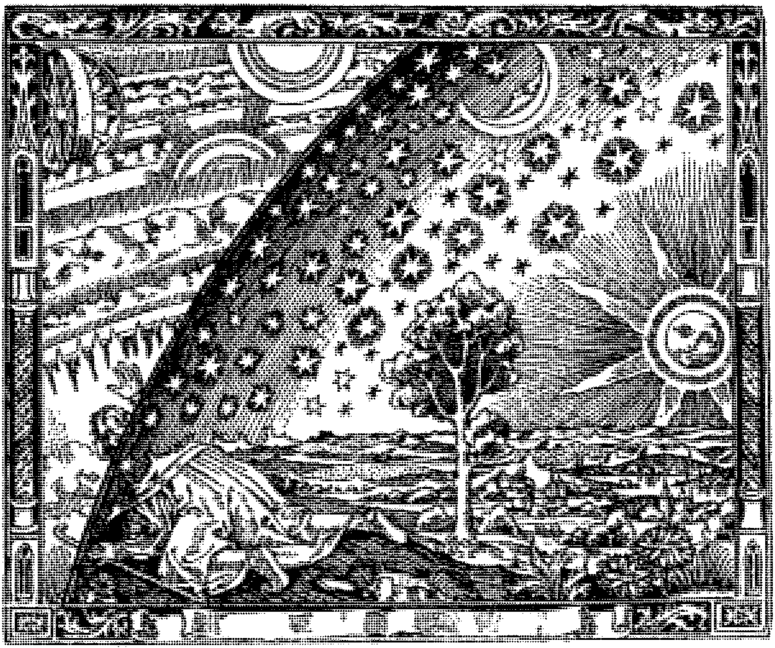
Questões externas

Porque funciona a matemática: uma resposta convencionalista

Todos sabemos que quem queira seguir engenharia ou física deve ser bom em matemática. E são cada vez mais aqueles que descobrem que para trabalhar em certas áreas da economia ou da biologia devem pôr a matemática em dia. A matemática imiscuiu-se na sociologia, na psicologia, na medicina e na linguística. Sob o nome de cliometria, tem estado, para horror da velha guarda, a imiscuir-se na história. Porque sucede isto? Donde vem a força da matemática? O que a faz funcionar?

Uma resposta muito popular é a de que Deus é matemático. Se, como Laplace, se encarar a divindade como uma hipótese desnecessária, então pode dizer-se o mesmo da seguinte forma: o universo exprime-se naturalmente na linguagem da matemática. A força gravitacional decresce com a segunda potência da distância; os planetas giram em torno do Sol segundo elipses; a luz avança em linha recta, ou assim acontecia antes de Einstein. A matemática, nesta concepção, evolui como uma imagem simbólica exacta do universo. Não é então de admirar que a mate-

Pierre Simon Laplace
1749-1827



O astrónomo procura alcançar a verdade. É representado por uma figura que transpõe a fachada de forma a atingir o entendimento do mecanismo fundamental que se esconde por detrás das aparências (xilogravura de Camille Flammarion, L'Atmosphère metéorologie populaire, *1888)*

Fonte: Deutsches Museum, Munique

mática funcione; é exactamente para isso que existe. O universo impôs a matemática à humanidade.

Esta visão da matemática coaduna-se com o que é frequentemente designado por visão platónica. O platonismo matemático é a noção de que a matemática existe independentemente dos seres humanos. Está «algures lá fora», vogando eternamente no mundo das ideias platónicas, que tudo impregnam. O π está no céu*. Se, por exemplo, pretendermos comunicar com as criaturas da galáxia X-9, devemos fazê-lo com a linguagem matemática. Será escusado interrogarmos o nosso correspondente extragaláctico sobre a sua família, o seu emprego, o seu governo ou as suas artes gráficas, pois estas facetas da existência poderão não ter qualquer significado para ele. Se, por outro lado, o estimularmos com os algarismos de π (3, 1, 4, 1, 5, ...), ele, segundo este raciocínio, não deixará de nos dar

* *Pi is in the sky* no original. *(N. do T.)*

resposta. O universo terá imposto à galáxia X-9 essencialmente a mesma matemática que impôs aos terrestres. A matemática é universal.

Sob esta perspectiva, a tarefa do teórico é escutar a música do universo e transcrever a melodia.

Há, contudo, outra perspectiva sobre o mesmo assunto. Segundo esta outra perspectiva, as aplicações da matemática surgem por decreto. Nós próprios criamos toda uma variedade de padrões ou de estruturas matemáticas. E ficamos tão deliciados com a nossa obra que forçamos deliberadamente vários aspectos físicos e sociais do universo a adaptarem-se-lhe tão bem quanto seja possível. Se o sapatinho serve, como o da Gata-Borralheira, então temos uma bela teoria; se não — e o mundo real é mais parecido com a irmã feia da Cinderela, o sapatinho aperta sempre —, somos de novo enviados para o banco de ensaios da teoria.

Este ponto de vista está relacionado com a opinião de que as teorias da matemática aplicada são meros «modelos matemáticos». A utilidade de um modelo advém precisamente do seu sucesso em imitar ou prever o comportamento do universo. Se um modelo é de alguma forma desadequado, procura-se um modelo melhor ou uma versão melhorada do mesmo modelo. Não há verdade filosófica quer na afirmação «a Terra gira em torno do Sol», quer em «o Sol gira em torno da Terra». São ambas modelos, e determinamos a que queremos aplicando critérios como a simplicidade, a fertilidade, etc. Ambas foram induzidas por experiências matemáticas simples anteriores.

Esta posição filosófica tem vindo a tornar-se cada vez mais popular. Cada vez existem mais cursos com nomes como «modelação matemática». O que teria sido ensinado à geração anterior como «a teoria tal e tal» é agora conhecido como nada mais do que o «modelo para tal e tal». A verdade abdicou, reina o pragmatismo.

Alguns exemplos simples de matemática por decreto

Como poderia esperar-se, quase nenhum cientista segue uma doutrina consistente. Os cientistas acreditam simultaneamente em teorias e em modelos, na verdade e no pragmatismo.

No que toca ao «pensador típico», diria que é um platonista. Diria mesmo que é tão platonista que tem dificuldade em aceitar a possibilidade de impor estruturas matemáticas ao mundo. Explicarei isso com um exemplo que todos conhecem: a operação matemática de adição.

Depois da enumeração dos inteiros 1, 2, 3, ..., e do reconhecimento intuitivo da ordem sequencial, a adição é logo a primeira operação que se aprende. É possível distinguir três aspectos na adição. O primeiro

destes é o aspecto algorítmico. Refere-se às regras pelas quais podemos efectuar somas (ou pôr um computador a fazê-lo). O segundo (que foi indevidamente sublinhado pela «nova matemática») prende-se com as leis formais a que a adição obedece, $a + b = b + a$, ou $(a + b) + c = a + (b + c)$, ou $a + 1 > a$, por exemplo. O terceiro é a aplicação da adição: quando devemos somar?

Os primeiros dois são fáceis. O terceiro é difícil, sendo aqui que a questão se torna interessante. Chegamos aqui aos «problemas» da escola primária. Muitas crianças sabem somar, mas não sabem quando devem fazê-lo. O leitor acha que os adultos sabem quando somar? Vamos ver.

O que poderá haver de díficil acerca de saber quando somar? Duas maçãs mais três maçãs são cinco maçãs; onde está o mistério? Avançamos seguidamente para discussão uma lista de problemas que claramente exigem uma adição:

- *Problema 1:* uma lata de atum custa \$1,05. Quanto custam duas latas de atum?
- *Problema 2:* mil milhões de barris de petróleo custam x dólares. Quanto custa 1 bilião de barris?
- *Problema 3:* no cálculo do índice de crédito feito por um banco somam-se dois pontos se o cliente for dono da casa em que vive, um ponto se o seu salário for superior a \$20 000, outro ponto se não tiver mudado de casa durante os últimos cinco anos, e subtrai-se um ponto se tiver antecedentes criminais, outro ponto se tiver menos de 25 anos, etc. Qual o significado desta soma?
- *Problema 4:* num teste de inteligência soma-se um ponto pela resposta correcta a uma pergunta sobre George Washington, um ponto por responder bem acerca dos ursos-polares, um ponto se souber das mudanças de hora no Inverno, etc. Que representa a soma final?
- *Problema 5:* adiciona-se uma chávena de leite a uma chávena de pipocas. Quantas chávenas da mistura resultante se obterão?
- *Problema 6:* um homem consegue pintar uma sala num dia. Junta-se à força de trabalho um segundo homem que pinta uma sala em dois dias. Quantos dias demorarão os dois homens trabalhando em conjunto?
- *Problema 7:* uma pedra pesa 1 kg. Outra pedra pesa 2 kg. Quanto pesarão as duas pedras juntas?

Alguns comentários sobre estes problemas.

Problema 1: a mercearia a que vou vende-me uma lata de atum por \$1,05 e duas latas por \$2,00. Bem, o leitor poderá dizer que o preço

«verdadeiro» é $2,10 e que o merceeiro não me cobrou o preço «verdadeiro». Eu digo que o preço «verdadeiro» é aquele que o merceeiro pede e que, se ele achar que a adição normal não é adequada ao seu negócio, não terá pruridos em adaptá-la. Fazer descontos é tão comum que todos entendemos a desadequação da adição neste contexto.

Ao comprarmos uma lata de atum por $1,05 e uma lata de pêssegos por 60 ¢ e somarmos estes preços para obtermos uma conta de $1,65, o que temos é uma reflexão da redução de todos os bens a um sistema de valores comum. Esta redução, depois seguida por uma adição dos preços individuais, é um dos grandes pilares do mundo económico. Houve alturas, como durante os períodos de racionamento, em que 1 kg de carne custava 40 ¢ e uma senha vermelha e 1 kg de açúcar custava 30 ¢ e uma senha azul. Temos aqui um exemplo de preços «vectoriais», em que o preço compreende várias componentes e em que a adição «vectorial» mostra a natureza arbitrária desse processo.

Problema 2: encontramos aqui o inverso do problema anterior: que preço será cobrado por um bem escasso? É certamente de esperar uma penalização, e não um desconto, sendo, por consequência, a adição normal de novo desadequada. Para levantar uma questão absurda, mas que está relacionada, poder-se-ia perguntar: se a *Mona Lisa* está avaliada em $10 000 000, quanto valerão duas *Mona Lisas?*

Problema 3: o banco calculou aquilo a que se poderá chamar um índice de mérito para o seu potencial cliente. Será realmente razoável considerar que os antecedentes criminais são equilibrados pelo salário superior a $20 000? Talvez seja.

Índices de mérito como este são largamente utilizados. Em certo estado americano vigora um sistema de pontuações negativas para infracções de trânsito. Classificações como esta — mas noutros campos — poderão servir de base à ética automatizada ou à justiça e à medicina administradas por computador. É por de mais evidente a natureza *ad hoc* destes esquemas.

Faz-nos lembrar a história do homem que se sentou em Times Square a pedir. Tinha junto de si um cartaz onde se podia ler:

Guerras	2
Pernas	1
Mulheres	2
Filhos	4
Ferimentos	2
Total	11

Problema 4: na maioria dos testes somam-se as classificações atingidas em cada uma das partes. Este é o procedimento que se aceita como normal. Se na universidade se faz um teste de matemática que não seja de escolha múltipla, então os estudantes barafustam para que cada uma das partes seja cotada. Os professores sabem que essa cotação é sempre atribuída subjectivamente. Toda essa ideia de somar pontos é largamente aceite, não obstante ser um processo *ad hoc.* Evita-se a difícil questão que agora grassa sobre o que é, afinal, avaliado por cada pergunta.

Problema 5: uma chávena de pipocas absorverá quase por inteiro uma chávena de leite sem entornar nada. O importante aqui é que «adicionar» num sentido físico ou mesmo num determinado sentido popular não corresponde necessariamente a «adicionar» no sentido matemático.

Problema 6: de modo semelhante, e como consequência de uma ambiguidade de linguagem, permitimos que o «juntar» popular implique o «juntar» matemático. Isso é evidente neste problema, tirado directamente de um livro de álgebra para o liceu.

Problema 7: apenas no contexto de uma teoria — a mecânica newtoniana, por exemplo — é possível uma discussão coerente de medições físicas. O peso é proporcional à massa, que é aditiva. Ou seja, e por definição, a massa da união de dois corpos é a soma das massas dos corpos em separado. Se se medir com um dinamómetro a massa de duas pedras suficientemente pesadas, poder-se-á notar um comportamento não linear da mola (e eventualmente efectuar as correcções necessárias), graças à definição aditiva que aceitámos de antemão. A simples soma dos alongamentos da mola pode ser desadequada.

A conclusão desta discussão é a seguinte: não há, nem poderá haver, uma sistematização completa de todas as circunstâncias em que deva aplicar-se a soma. Inversamente, qualquer aplicação sistemática da soma a uma classe vasta de problemas é feita por decreto. Não fazemos mais do que recomendar a soma, esperando que a experiência passada e futura ateste a sensatez dessa recomendação.

Se isto se verifica com a soma, verifica-se também com várias outras operações e teorias matemáticas mais complexas. Esta é uma explicação parcial para as dificuldades que se nos deparam quando resolvemos «problemas» e, a um nível mais elevado, para as graves dificuldades com que se defronta o cientista teórico.

Um último exemplo: os negócios de uma padaria vão de vento em popa. De modo a impor a calma e a ordem entre os seus clientes, o dono

engendrou um sistema de números, como os que estão em funcionamento em várias lojas. Que deverá ele fazer? Bem, dirá o leitor, basta fazer com que os clientes sejam atendidos segundo a ordem em que chegam. Mas este é apenas um dos critérios possíveis. O universo não exige este critério em particular, que também não desapareceria numa nuvem de fumo se outro qualquer fosse aplicado. Talvez as filas de espera sejam longas e o dono decida animar a espera, distribuindo números premiados que proporcionem atendimento imediato aos respectivos portadores. A matemática pode ajudar nisso. Talvez se receba gasolina se o número for par, enquanto quem tenha um número ímpar não a recebe. Parece estranho? Porém, um sistema semelhante a este esteve em vigor durante a recente falta de gasolina.

A imposição da matemática é feita por decreto, mas, uma vez estabelecida, acarreta diversas consequências sociais. A matemática do imposto sobre o rendimento é por decreto, a matemática da segurança social é por decreto, e cada uma destas é apoiada por gigantescos sistemas informáticos. Uma vez postos em movimento, não é fácil desligá-los sem correr o risco de provocar rupturas sociais. E não é fortuito, na minha opinião, que uma crescente matematização social ocorra precisamente numa época em que se acredita cada vez mais numa filosofia da ciência que apenas confere às equações o estatuto de modelo.

Decretos nas ciências físicas?

Como pode o homem, mera partícula no universo, impor a sua vontade matemática aos grandes processos cósmicos? O raciocínio torna-se aí mais difícil de seguir, mas pode ser construído segundo as linhas que se seguem.

Examinaremos duas teorias para o movimento planetário, a que foi avançada por Cláudio Ptolemeu (século II) e a de Isaac Newton (1642-1727). No sistema ptolemaico, a Terra está fixa no seu lugar próprio, enquanto o Sol e todos os planetas giram em seu redor. Se centrarmos a nossa atenção, por exemplo, em Marte, poderemos considerar que viaja em torno da Terra segundo um certo círculo excêntrico com determinado período constante. Compare-se agora esta teoria com o que se observa. Ajusta-se, mas apenas parcialmente. Marte apresenta por vezes

Cláudio Ptolemeu
c. 145 d. C.

um movimento retrógado que não pode ser explicado por um movimento circular simples.

Para ultrapassar esta limitação, Ptolemeu acrescenta ao movimento circular simples um segundo movimento circular excêntrico com um outro raio menor e uma outra frequência. Este sistema consegue prever o movimento retrógado, sendo-nos então possível, por meio de um ajustamento dos raios, das excentricidades e das frequências, atingir um bom acordo com o movimento observado de Marte. Se se desejar uma precisão ainda maior, pode adicionar-se um terceiro círculo de raio ainda menor e com um período também diferente. Ptolemeu logrou, assim, um acordo muito bom entre a teoria e a observação. Este é um dos exemplos mais antigos de ajustamento de curvas em ciência — de certa forma semelhante à análise harmónica —, mas não foi obtida qualquer explicação mais profunda do fenómeno; não foi possível qualquer generalização válida para todos os planetas.

Mil e quinhentos anos mais tarde, segundo Pope, Deus disse: «'Faça-se Newton', e tudo se tornou luz.» A teoria newtoniana para os movimentos planetários apresenta-se como um modelo moderno e de imensa importância teórica e histórica. Os princípios fundamentais são aí muito mais profundos. Entram aí em cena novos elementos: as massas, as acelerações, a lei do movimento, $F = mA$, e a lei da gravitação segundo o inverso do quadrado. Estas leis físicas exprimem-se matematicamente como equações diferenciais. Postula-se a validade universal dessas leis, aplicando-se não só à Terra e ao Sol, mas também a Marte, a Vénus e a todos os outros planetas, cometas e satélites. Onde o sistema de Ptolemeu parece estático e *ad hoc* — mero ajustamento de curvas — e desligado da realidade, o sistema newtoniano parece, em comparação, ter uma dinâmica rica, estar firmado na realidade da matéria, da força e da aceleração. A equação diferencial que dele resulta parece estar muito perto de representar a verdade definitiva acerca de como o universo é regido.

Mas será isto assim tão simples? Consideremos a equação diferencial para Marte e tentemos calcular a sua solução. Prevê-se que Marte gira em redor do Sol segundo uma elipse. Compare-se isto com as observações. Não se verifica com exactidão; observam-se discrepâncias. A que se devem? Bem, há um pequeno erro na força. Para além da força do Sol, há também a força de Júpiter, um planeta gigantesco, com a qual devemos, possivelmente, contar. Acrescentemos então Júpiter. Ainda assim, não funciona com precisão total. Deve ser necessário tomar ainda em consideração outras forças. Quantas forças existem? É difícil saber; existe um número ilimitado de forças, e algumas delas poderão ser relevantes. Todavia, não existe uma forma sistemática de dizer a *priori* quantas forças existem e quantas deveremos ter em conta. É escusado dizer que

não é possível prever alterações históricas à lei de Newton, como a mecânica relativista. O mesmo critério de sucesso está ainda em vigor e uma previsão exacta dada pela mecânica celeste mais recente parece, como a de Ptolemeu, o resultado de uma colagem — uma teoria por decreto. Ainda estamos a ajustar curvas, mas fazemo-lo com base no vocabulário mais versátil das soluções de equações diferenciais, e não de curvas simples preexistentes, como os círculos.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

E. Wigner.

Sobre o problema 6

F. P. Brooks, Jr., sobre interessantes resultados estatísticos acerca da produtividade de equipas de programadores.

Modelos matemáticos

Que é um modelo? Antes de generalizarmos, consideremos alguns exemplos concretos. Como acabámos de dizer, a teoria de Newton para o movimento planetário foi um dos primeiros modelos modernos.

Sob a hipótese simplificadora de um sol e um único planeta, Newton deduziu matematicamente que o planeta deveria descrever uma órbita que respeitasse as três leis que Kepler havia inferido algum tempo antes a partir da análise de um número considerável de observações astronómicas. Essa conclusão foi um grande triunfo para a análise física e matemática e deu ao sistema de Newton o seu ímpeto.

Com três, quatro, cinco, ..., corpos interagindo entre si, o sistema de equações diferenciais torna-se cada vez mais complicado. Mesmo com apenas três corpos poderá ser impossível chegar a uma solução analítica, *à la Kepler.* Existe normalmente uma lacuna entre aquilo que gostaríamos que a nossa teoria fizesse e aquilo que conseguimos que ela de facto faça. Isto pode condicionar o desenvolvimento da nossa metodologia. Se pretendemos saber onde estará Júpiter de modo a planearmos convenientemente o lançamento de uma sonda para esse planeta, deveremos avançar segundo determinada direcção matemática. Se estivermos interessados em investigar a estabilidade dinâmica do sistema solar, teremos de avançar noutra direcção.

A modelação é a arte de adoptar a estratégia adequada face às dificuldades inerentes à matemática. Tome-se o exemplo, pouco conhecido, de um problema de engenharia química: uma reacção química em tanque agitado (v. R. Aris, pp 152-164).

Um tanque cilíndrico está provido de várias tubagens de entrada e de uma tubagem de saída. Pelas entradas são admitidos os reagentes e pela saída são escoados os produtos da reacção juntamente com as sobras dos reagentes. O tanque está cercado por uma camisa de refrigeração e tanto o tanque de reacção como a camisa de refrigeração são agitados de modo a ser atingida uma mistura perfeita.

Ora, para além das hipóteses geométricas, que poderão ser apenas aproximadamente verdadeiras, deparam-se-nos, pelo menos, onze leis ou hipóteses, H_0, H_1, ..., H_{10}, que poderão servir de base à formulação de um modelo matemático. H_0 atesta as leis de conservação da matéria e energia e a lei da condução térmica de Fourier. H_1 afirma que os volumes no tanque e na camisa são constantes, tal como o são as taxas de escoamento e as temperaturas de admissão. Considera-se ainda que a mistura é perfeita, de modo que a temperatura da reacção seja independente da posição. Assim se propõe hipótese sobre hipótese. H_9 afirma que a reacção é de primeira ordem e que é irreversível em relação aos compostos fundamentais.

Ora, tudo dependendo das hipóteses escolhidas, podem ser definidos seis modelos principais. O modelo mais geral depende apenas de H_0, ..., H_4, e resulta em seis equações simultâneas, enquanto o modelo mais simples supõe H_0, ..., H_{10} e resulta em duas equações.

«Um modelo matemático», diz Aris, é «um conjunto completo e consistente de equações matemáticas que são concebidas de modo a corresponderem a uma outra entidade, o seu protótipo. O protótipo poderá ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceptual, porventura até mesmo um outro modelo matemático.» Onde se lê «equações» pode ler-se «estrutura», pois nem sempre se trata de modelos numéricos.

Alguns dos objectivos que motivam a criação de modelos são (1) obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico, (2) influenciar experiências ou observações posteriores, (3) fomentar a compreensão e o progresso conceptual, (4) auxiliar a axiomatização da situação física, (5) promover a matemática e a arte de construir modelos matemáticos.

A percepção de que as teorias físicas podem mudar ou sofrer alterações (mecânica clássica e mecânica relativista, por exemplo), de que as teorias podem rivalizar entre si, de que a matemática que conhecemos poderá ser inadequada para compreendermos as consequências mais profundas de uma teoria, tudo isso conduziu a uma aceitação pragmática de um modelo como um «artigo datado», como uma aproximação conveniente a um

estado de coisas, e não como uma expressão da verdade absoluta. Podemos considerar um modelo bom ou mau, simplista ou sofisticado, estético ou inestético, útil ou inútil, mas ninguém está disposto a etiquetá-lo de «verdadeiro» ou «falso». A atenção que hoje em dia se dedica a modelos, por oposição a teorias, deu azo ao estudo da construção de modelos como uma actividade em si própria, com uma diminuição correspondente do interesse pela situação física específica que se tenta modelar.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

R. Aris; P. Duhem; H. Freudenthal [1961]; L. Iliev.

A utilidade

1. A variedade das aplicações matemáticas

É útil aquilo que satisfaz uma necessidade humana. Ouve-se dizer frequentemente que a matemática é útil, mas, por ser tão alargada a variedade das suas aplicações, será vantajoso considerar separadamente os diversos significados que podemos atribuir a esta palavra. Um pedagogo — em especial se for um dos clássicos — dirá que a matemática é útil por nos ensinar a pensar e a raciocinar com rigor. Um arquitecto ou um escultor — novamente um dos clássicos — dirá que a matemática é útil por nos permitir a percepção e a criação de beleza visual. Um filósofo poderá dizer que a matemática é útil na medida em que lhe permite escapar à realidade da vida quotidiana. Um professor dirá que a matemática é útil porque lhe fornece o sustento. Um editor sabe que a matemática é útil porque faz vender muitos livros didácticos. Um astrónomo, ou um físico, dirá que a matemática é útil por ser a linguagem da ciência. Um engenheiro civil afirmará que a matemática é indispensável para construir uma ponte. Um matemático dirá que, dentro da própria matemática, um corpo matemático é útil quando for aplicável a um outro corpo matemático.

Como se vê, os significados da expressão *utilidade matemática* abarcam elementos estéticos, filosóficos, históricos, psicológicos, pedagógicos, comerciais, científicos, tecnológicos e matemáticos. Ainda assim, não incluímos todos os significados possíveis. A história que se segue é contada pelo professor Roger Tanner, de Sydney, na Austrália. Dois alunos dirigiram-se certa vez ao escritório de um colega seu e disseram-lhe que pretendiam frequentar o seu curso de matemática aplicada avan-

çada. O professor, encantado, deu aos potenciais alunos uma grande conversa de vendedor sobre o seu curso: qual era o programa, como se relacionava com as outras matérias, etc. Mas os dois alunos interromperam-no: «Não, não. Não está a perceber. Nós somos trotskistas. Queremos frequentar o seu curso por ser completamente inútil. Se o frequentarmos, 'eles' não poderão pôr-nos a trabalhar para fins contra-revolucionários.» Portanto, até a inutilidade pode ser útil.

A nossa atenção recai aqui sobre a utilidade que a matemática apresenta para a actividade científica ou tecnológica. Podemos distinguir a utilidade dentro do próprio campo da utilidade para outros campos. Mesmo com estas subdivisões, o conceito de utilidade é extremamente subtil.

2. Sobre a utilidade da matemática para a matemática

Qual será o significado de afirmar que certa porção de matemática é utilizada ou aplicada dentro da própria matemática? Poderá, por exemplo, dizer-se que a teoria dos ideais é útil para a teoria dos números. Significa que alguns resultados da teoria dos ideais foram utilizados para demonstrar a impossibilidade de alguns casos especiais do último problema de Fermat. Significa que para entender a demonstração dessa impossibilidade o melhor é usar determinados teoremas da teoria dos ideais. (Os factos estão historicamente invertidos: a teoria dos ideais desenvolveu-se como parte de uma tentativa para demonstrar o último teorema de Fermat.) Neste sentido, pode falar-se da aplicação da análise tensorial à teoria da elasticidade, da teoria das variáveis complexas à teoria dos números, da análise não standard à teoria dos espaços de Hilbert ou da teoria de pontos fixos à teoria das equações diferenciais.

A aplicação da teoria A à teoria B dentro da matemática significa então que os materiais, a estrutura, as técnicas, os resultados profundos de A são utilizados para elucidar ou para deduzir factos sobre os materiais ou as estruturas de B. Se um corpo da matemática é utilizado ou ligado a outro corpo da matemática, esta actividade é muitas vezes designada por «pura». Ou seja, se a teoria dos ideais é utilizada numa investigação sobre o último teorema de Fermat, referimo-nos a uma investigação ou aplicação pura. Se, por outro lado, a teoria dos ideais for aplicada à teoria das ligações telefónicas (não sei se tal aconteceu), então tal utilização será designada por aplicada.

No entanto, os métodos e as demonstrações não são únicos: é possível demonstrar o mesmo teorema de diversas formas. Portanto, uma certa aplicação de algo em A pode ser desnecessária no que respeita à averiguação da verdade de algo em B. Poderá ser preferível, por razões

históricas ou por quaisquer outras, estabelecer *B* por meio de *C* ou de *D*. Na verdade, fazer isso pode mesmo constituir parte do jogo. Foi assim que durante muitos anos a demonstração do teorema dos números primos (v. capítulo 5) recorreu à teoria das funções de variável complexa. Sendo o conceito de número primo mais simples do que o de número complexo, considerou-se haver interesse no objectivo de estabelecer aquele resultado sem depender da utilização dos números complexos. Quando esse objectivo foi finalmente alcançado, a utilidade das variáveis complexas para a teoria dos números sofreu uma alteração.

O tempo pode provocar alterações de utilidade no sentido inverso. Quando foi feita a primeira demonstração do teorema fundamental da álgebra, a topologia dava ainda os primeiros passos e os aspectos topológicos da demonstração foram considerados óbvios ou de pouca importância. Cento e cinquenta anos mais tarde, dispondo-se de uma topologia madura, os aspectos topológicos do problema são considerados cruciais e constituem uma aplicação exemplar do conceito de número de rotação.

Em relação à utilidade dos teoremas, podemos traçar uma distinção entre teoremas úteis, para os quais foi encontrada uma aplicação, teoremas muito úteis, para os quais foram encontradas muitas aplicações, e teoremas inúteis, para os quais ainda não foram encontradas aplicações. Obviamente, podemos sempre aplicar um teorema *T* a qualquer coisa para chegarmos a um teorema *T¢*, encontrando, assim, uma aplicação para *T*. Mas esse tipo de truques contraria os padrões comuns de estética e de descrição matemáticas. Existem na bibliografia matemática milhões de teoremas, sendo a sua maioria, muito provavelmente, inútil. São becos sem saída.

É também verdade que se verifica uma tendência para conduzir o raciocínio — e depois a explicação — por teoremas clássicos ou muito conhecidos, como o teorema do valor intermédio, o teorema do ponto fixo ou o teorema de Hahn-Banach. Isso é, de certa forma, arbitrário, no mesmo sentido em que o aeroporto de Chicago é um ponto de passagem arbitrário para quem vá de avião de Providence, R. I., para Albuquerque, N. M. No entanto, não é difícil encontrar motivos para o fazer.

Os teoremas que se revelam muito úteis tornam-se importantes e ganham grande reputação. Isto é um tanto paradoxal, pois, se um teorema é fruto ou objectivo de actividade matemática, então esse objectivo deveria ser valioso enquanto objecto estético, independentemente de ele próprio estar na origem de outros objectivos.

Esta consideração especial por resultados «úteis», juntamente com a confusão acerca do significado de utilidade, está na origem de uma inflamada discussão acerca do que é útil e proveitoso e do que não o é. As opiniões sobre esta questão afectam todos os aspectos da matemática,

desde o ensino até à investigação, e resultam, por vezes, em volúveis entusiasmos passageiros.

Essa consideração pelos teoremas úteis é também uma causa da ênfase excessiva dada ao processo de matematização em detrimento dos resultados dessa matematização. Demasiados livros didácticos de matemática são hoje escritos num tom nervoso e ofegante em que um determinado objectivo é sistemática e inexoravelmente perseguido. Uma vez atingido esse objectivo, a sensação que sobrevém não é de exaltação, mas sim de anticlímax. Não encontramos nesses livros uma exposição de como e por que é importante esse objectivo, salvo, porventura, a afirmação de que aquele poderá ser um ponto de partida para alcançar outros objectivos mais profundos, que, infelizmente, o autor não pode descrever por limitações de espaço. Bem podemos culpar Euclides, porque essa tendência já se achava nas suas exposições.

3. Sobre a utilidade da matemática para outros campos científicos ou tecnológicos

A actividade em que a matemática é utilizada fora dos seus próprios interesses é normalmente designada por matemática aplicada. A matemática aplicada é inerentemente multidisciplinar e deveria idealmente ser estudada por quem não tem na matemática o seu principal interesse. Se a disciplina a que se aplica é, por exemplo, a física, poderá tornar-se difícil decidir o que deve ser classificado como matemática aplicada e o que deve ser classificado como física teórica.

A aplicação da matemática a outras áreas levanta questões de outra natureza. Admitamos que existe uma aplicação, por hipótese, da teoria das equações diferenciais parciais à teoria matemática da elasticidade. Podemos agora verificar se a teoria da elasticidade tem aplicações a outras áreas. Admitamos que sim, em engenharia teórica. Podemos então verificar se essa teoria terá interesse para o engenheiro que a aplica. Admitamos que tal acontece, que lhe permite analisar as tensões a que está sujeita a porta de um automóvel. Levantamos de novo a mesma questão, perguntando como poderá isso afectar o cidadão comum. Admitamos que a análise de tensões mostra que uma porta concebida recentemente satisfaz os requisitos mínimos de resistência exigidos por lei. Podemos desta forma seguir a aplicação da matemática desde o nível mais abstracto até ao nível do consumidor. É evidente que não somos obrigados a ficar por aqui. Podemos averiguar se o automóvel é de alguma forma útil. É útil para viajar todos os dias para o emprego. E serão essas viagens úteis?... Etc.

Acordemos em chamar utilidade comum àquela que afecta o cidadão comum (supondo que sabemos aquilo em que o cidadão comum está realmente interessado, o que é novamente uma hipótese questionável). Não sugerimos que se tome o critério comum como o único para julgar a utilidade matemática. Isso seria desastroso. Sendo, porém, as actividades de fabrico e consumo, de compra, venda e troca tão importantes, devemos ter uma noção tão boa quanto nos seja possível acerca do posicionamento da nossa ciência face a estas actividades básicas.

Que aplicações de matemática são de utilidade comum? A resposta a esta questão tem, obviamente, implicações profundas para a educação, para a preparação de textos e para a investigação. Contudo, a resposta está rodeada por mito, ignorância, desinformação e confusão entre desejos e realidade. Alguns exemplos de utilidade comum são claros como água. Quando num supermercado um empregado faz a conta a um saco de compras, ou quando se faz um orçamento num escritório de arquitectura, o que se tem é uma aplicação evidente de matemática ao nível da utilidade comum. Estes cálculos poderão ser triviais e executados por pessoas matematicamente pouco sofisticadas, mas não deixam de ser matemática, e os cálculos respeitantes a contagens, medidas e avaliações representam o grosso de todas as operações matemáticas ao nível da utilidade comum.

Quando ascendemos a matemáticas mais elevadas, torna-se mais difícil observar e verificar essas aplicações. Seria deveras interessante para a profissão se algum investigador enérgico e instruído dedicasse alguns anos a essa tarefa, visitando algumas empresas, laboratórios, fábricas, etc., a fim de documentar onde realmente isto acontece*.

Uma organização pode empregar pessoal qualificado em matemática, pode possuir um sofisticado sistema informático, por os aspectos teóricos do seu negócio poderem ser expressos em termos matemáticos. Tudo isso não significa ainda que a investigação matemática que é levada a cabo desça até ao nível da utilidade comum. O aparecimento de matemática potencialmente aplicável ao nível da utilidade comum pode ser impossibilitado ou frustrado por dúzias de razões diferentes. Poderá ser dema-

---

* Isto não é assim tão fácil.

Conta-se a história de como, há alguns anos, um grupo de especialistas foi convidado pela agência *A* a avaliar o seu patrocínio à investigação matemática. Qual do trabalho matemático patrocinado pela agência conduzira directamente a aplicações ao nível da utilidade comum de interesse para a agência *A*, de tal maneira que sem essa investigação tais aplicações tivessem sido impossíveis? Depois de alguns dias de reflexão, os peritos concluíram que não podiam identificar nenhum trabalho nessas condições, mas que o patrocínio dado à investigação matemática deveria ser justificado por outros motivos. Deveria justificar-se, por exemplo, por manter uma reserva de investigadores em actividade para fazer face a «eventuais necessidades».

siado difícil, dispendioso ou pouco exacto calcular as tensões sobre uma porta de um automóvel por meio de um modelo matemático. Poderá ser mais fácil, barato e fiável conduzir os testes com uma máquina por meio de colisões reais. Ou o modelo matemático poderá exigir o conhecimento de muitos parâmetros, parâmetros esses cujo valor podemos muito simplesmente desconhecer.

Num livro comum de matemática aplicada encontramos, por exemplo, uma discussão sobre o problema de Laplace para uma região do plano. Isso tem aplicações importantes em electrodinâmica e em hidrodinâmica, diz o autor. E tal poderá ser verdadeiro, mas seria interessante ver essas aplicações assinaladas ao nível da utilidade comum, e não ao da potencialidade de princípio.

4. Matemática pura e matemática aplicada

Segundo certo princípio muito difundido, a mente está acima da matéria, o espírito acima da carne e o universo mental acima do universo material. Este princípio pode ter tido origem na fisiologia humana e na intuição que identifica o *eu* com a *mente* e localiza a mente no cérebro. A substituição de um órgão, como uma perna ou um olho, por um órgão artificial ou transplantado não parece afectar ou ameaçar o *eu*. No entanto, se se imaginar um transplante de cérebro ou a descarga do conteúdo do cérebro de outrem para o nosso, então o *eu* logo se sente ameaçado de morte — está a ser destruído.

Godfrey Harold Hardy
1877-1947

A suposta superioridade da mente sobre a matéria tem a sua expressão matemática na pretensão de que a matemática é ao mesmo tempo a mais nobre e a mais pura forma de raciocínio, que tem origem unicamente no espírito, com pouco ou nenhum auxílio do mundo exterior e que também nada tem a devolver ao mundo exterior.

A terminologia em voga distingue a matemática «pura» da matemática «aplicada», existindo um sentimento generalizado e tácito de que existe algo de impuro nas aplicações. Uma das maiores confissões de pureza chega-nos pela pena de G. H. Hardy (1877-1947), que escreveu:

> Nunca fiz nada de «útil». Nenhuma descoberta minha fez, nem virá provavelmente a fazer, directa ou indirectamente, para o bem ou para o mal,

qualquer diferença ao conforto do mundo. Auxiliei a formação de outros matemáticos, mas matemáticos da minha própria estirpe, e o seu trabalho tem sido até agora, e na medida em que os tenho ajudado, tão inútil como o meu próprio. Avaliado segundo qualquer padrão de utilidade prática, o valor da minha vida matemática é zero e, fora da matemática, é de qualquer forma, trivial. Existe apenas uma hipótese de fuga a um veredicto de completa trivialidade: ser julgado como havendo criado algo que merecesse ser criado. E é indesmentível que criei algo: a questão prende-se com o seu valor.

A justificação para a minha vida, ou para a de quem quer que tenha sido um matemático tal como eu fui, é esta: acrescentei algo ao conhecimento e ajudei outros a acrescentar mais; e estes algos diferem apenas em grau, e não em género, das criações dos grandes matemáticos, ou das de qualquer outro artista, grande ou pequeno, que deixe atrás de si algum monumento à sua memória.

A posição de Hardy é radical, mas exprime algo que é essencial ao espírito dominante na matemática do século XX — que a mais alta aspiração em matemática é alcançar uma obra de arte duradoura. Se, por vezes, uma bela peça de matemática pura se revela útil, tanto melhor. Mas a utilidade como objectivo é inferior à elegância e à profundidade.

Deu-se nos últimos anos uma mudança apreciável nas atitudes predominantes entre os matemáticos americanos. A matemática aplicada está a entrar na moda. Esta tendência não é certamente alheia a alterações no mercado de empregos académicos. Não existem empregos suficientes para todos os matemáticos que fazem o doutoramento em universidades americanas. Dos empregos que se vêem anunciados, muitos exigem preparação em estatística, ciência da computação, análise numérica ou matemática aplicada. Nota-se, como resultado, um esforço por parte de muitos matemáticos por encontrarem uma ponte de ligação entre a própria especialidade e alguma área de aplicação. Não é claro se esta mudança de atitude é permanente ou passageira. Não há grandes motivos para acreditar numa inversão dos valores elementares enraizados entre os matemáticos e que ditam a inferioridade da utilidade como objectivo.

A declaração de superioridade da mente sobre a matéria exerce a sua influência sobre a escrita da história da matemática. A maior parte dos textos clássicos sobre este tema está muito mais próxima das questões internas, ou seja, da relação da matemática consigo própria. Apesar de todo o material que se conhece sobre questões externas, esses textos permanecem por examinar, subvalorizados ou mal representados. Ignora-se, por exemplo, o papel da astronomia posicional no desenvolvimento

da teoria das funções de variável complexa. Sabe-se que uma boa parte da motivação para essa teoria surgiu da vontade de resolver a equação posicional de Kepler para o movimento planetário.

Deixando de lado considerações sobre a superioridade, pode afirmar-se com convicção que é mais difícil, sob vários aspectos, trabalhar em aplicações do que em matemática pura. O palco é maior, os factos são mais numerosos e mais vagos. A exactidão e o equilíbrio estético que tantas vezes formam a alma da matemática pura podem tornar-se inatingíveis.

5. Do hardyismo ao maoísmo matemático

O hardyismo é a doutrina segundo a qual apenas se deve estudar a matemática inútil. Esta doutrina é apresentada como uma convicção estritamente pessoal no livro de Hardy *A Mathematician's Apology.*

O maoísmo matemático é, pelo contrário, a doutrina segundo a qual apenas se devem estudar os aspectos socialmente úteis da matemática. «O que exigimos», escreveu o presidente Mao Tse-Tung, «é a unidade da política e da arte.»

A certa altura, durante o regime de Mao, foi declarada uma moratória à investigação científica. Durante esse período, os comités de revisão deveriam avaliar a importância das várias áreas e subáreas, tendo em atenção o critério de que a investigação deve ser orientada para problemas práticos e de que o ensino deve basear-se em aplicações concretas. Os investigadores foram pressionados a abandonarem certas áreas, como a topologia. Foi sublinhada a política de «portas abertas» na investigação científica, segundo a qual «a investigação científica deveria estar ao serviço da política do proletariado, dos trabalhadores, camponeses e soldados e deveria ser integrada na produção». Os investigadores deveriam abandonar as suas torres de marfim e ocupar empregos em fábricas e comunas; inversamente, os camponeses e os trabalhadores deveriam ser conduzidos até às instituições a fim de proporem problemas de investigação. A inves-tigação deveria combinar os esforços de administradores, investigadores e trabalhadores, de velhos, adultos e jovens. Esta ideia ficou conhecida como o princípio dos «três-em-um».

Em 1976 uma delegação de eminentes matemáticos norte-americanos visitou a República Popular da China. Durante essa visita os delegados proferiram palestras, assistiram a palestras e tiveram oportunidade de se encontrar informalmente com matemáticos chineses. Publicaram posteriormente um relatório, *Matemática Pura e Matemática Aplicada na*

República Popular da China. Segue-se um dos diálogos mais interessantes (Kohn é o professor J. J. Kohn, da Universidade de Princeton):

Diálogo sobre a beleza da matemática (extraído de uma discussão na Universidade Hua-Tung de Xangai)

KOHN — Não devia apresentar a beleza da matemática? Não seria uma fonte de inspiração para os seus alunos? Não há na ciência espaço para a beleza?

RESPOSTA — A primeira exigência é a produção.

KOHN — Isso não responde à pergunta.

RESPOSTA — A geometria foi desenvolvida para as aplicações. A evolução da geometria não podia satisfazer a ciência e a tecnologia; no século XVII Descartes descobriu a geometria analítica. Estudou pistões e tornos e também os fundamentos da geometria analítica. O trabalho de Newton foi produto do desenvolvimento industrial. Newton disse: «A base de qualquer teoria é a prática social.» Não existe qualquer teoria de beleza com a qual todos concordem. Para uns o belo é uma coisa, para outros é outra. A construção socialista é bela e é um estímulo para as pessoas daqui. Antes da revolução cultural alguns de nós acreditávamos na beleza da matemática, mas éramos incapazes de resolver problemas práticos; agora trabalhamos com tubos de água e de gás, com cabos e com laminadores. Fazemo-lo pela nação e os trabalhadores apreciam esse esforço. É uma sensação bela.

É claro que aquilo que se pretende, na matemática como em tudo, é um equilíbrio. Será que existe em algum país um equilíbrio adequado? Ninguém o sabe. Depois da morte de Mao, o desequilíbrio do maoísmo matemático tornou-se evidente e foram tomadas medidas correctivas. Depois de falar com matemáticos chineses que visitaram os EUA na Primavera de 1979, fiquei com a impressão de que a investigação na China é agora semelhante à que se faz em qualquer outro país.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

D. Bernstein; Garrett Birkhoff; R. Burrington; A. Fitzgerald e S. MacLane; G. H. Hardy; J. von Neumann; K. Popper e J. Eccles; J. Weissglass.

À sombra da figueira

As histórias contemporâneas da matemática ignoram alguns dos aspectos da matemática. Referimo-nos aos negócios, ao comércio, à guerra,

ao misticismo numérico, à astrologia e à religião. Em certos casos não se reuniu ainda a informação pertinente; noutros, os autores, procurando estabelecer para a matemática uma nobre ascendência e uma impoluta existência científica, fecharam os olhos. As histórias sempre se mostraram dispostas a defender a sua natureza científica, mas a princesa das ciências viveu uma vida mais excitante e interessante do que os seus historiadores o desejariam.

As áreas que mencionámos foram (e algumas são ainda) palcos onde foram reveladas grandes ideias da matemática. Há muito poder criativo à sombra da figueira.

1. A matemática no mercado

O comércio, a avaliação, a cunhagem de moeda e a concessão e o pedido de empréstimos foram, obviamente, uma importante fonte de conceptualização para a matemática. Não obstante a conspiração de silêncio actual, sabe-se muito acerca das influências recíprocas entre o mundo dos negócios e a matemática. As características principais do desenvolvimento da aritmética durante a Idade Média são claras; escreveram-se livros sobre a história da contabilidade. Durante o período medieval e do início da Renascença alguns grandes matemáticos ocuparam-se do estudo da escrita comercial. Por exemplo, em 1202 Fibonacci introduziu no seu *Liber Abaci* escrituração com números romanos e árabes lado a lado. Em 1494 Luca Pacioli dedicou três capítulos do seu *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* ao comércio, à contabilidade, ao dinheiro e ao câmbio. Nos séculos seguintes, o matemático flamengo Simon Stevin (1548-1620) e o matemático inglês Augustus de Morgan (1806-1871) dedicaram alguma atenção à contabilidade. No século em que vivemos os computadores electrónicos tornaram-se indispensáveis aos negócios; o aperfeiçoamento destas máquinas empenhou alguns dos espíritos mais brilhantes da matemática e da física. Herman Goldstine relata pormenorizadamente essa história. Hoje, tal como no mundo antigo, o comércio

Luca Pacioli
1445-1514

Simon Stevin
1548-1620

tem sido o principal consumidor de operações matemáticas, medidas em termos do número de operações efectuadas.

Encontramos no comércio as quatros operações elementares: a soma para calcular um total, a subtracção para fazer um balanço, a multiplicação para copiar e a divisão para a partilha em partes iguais. Antecedem-nas logicamente, embora nem sempre cronologicamente, outros conceitos mais elementares. O câmbio ou equivalência: duas ovelhas por uma cabra. A definição de medidas abstractas de valor: tudo tem um preço. Conseguem-se, assim, classes de valor equivalente. Atribuiu-se inicialmente valor intrínseco aos representantes abstractos das classes de equivalência, as moedas, mas o seu valor tende a tornar-se simbólico à medida que se passa para papel-moeda, cheques, linhas de crédito e *bits* na memória de um computador.

Está solidamente enraizada a noção de que todos os valores simbólicos se podem converter e que estão sujeitos às leis da aritmética: se uma cabra = 2 ovelhas e uma vaca = 3 cabras, então podemos calcular que uma vaca = 3 × (2 ovelhas) = 6 ovelhas.

A comparação: o conceito de «maior do que» e a institucionalização das leis aritméticas para a desigualdade:

1) $a < b$, ou $a = b$, ou $a > b$ (existe sempre um valor comparativo);
2) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ (o sistema de valores é transitivo).

O conceito de discreto, por oposição a contínuo, é evidenciado pela cunhagem de moedas, que se usam em unidades padronizadas. Se as moedas forem consideradas demasiado valiosas, poderão ser divididas. Se as moedas não forem suficientemente valiosas, poderão ser divididos os artigos obtidos em troca. Isto conduz à noção de fracção («divisão»).

À medida que passamos do mundo antigo para os tempos modernos, podemos distinguir toda uma variedade de operações e conceitos que entraram na matemática directamente pela experiência com o dinheiro ou que foram dessa maneira reforçados. Os algoritmos da aritmética foram criados por força dos negócios e estão em permanente alteração. Os algoritmos que hoje as crianças aprendem na escola primária não têm sequer cem anos. Sabe-se lá como farão as crianças do próximo século as suas somas, dispondo de calculadoras portáteis ou de melhor ainda. As ideias de juro, de juro composto e de desconto têm analogias com aplicações ao cálculo e, portanto, a uma enorme variedade de teorias do crescimento.

A teoria das probabilidades entrou na matemática pelos jogos de azar — transacções financeiras deveras antigas — e aplica-se hoje aos mais elevados níveis da ciência teórica. O conceito de uma moeda repetidamente

lançada ao ar tornou-se um dos arquétipos mais fortes da experiência matemática, o paradigma da aleatoriedade, independência e equiprobabilidade.

As noções probabilísticas de valor esperado e de risco vêm também dos jogos de azar e tornaram-se depois indispensáveis aos seguros de vida, como parte da estatística. No seguimento destas teorias clássicas, temos as modernas teorias das filas de espera, do tráfego e da optimização.

O MODELO DE SAINT LOUIS

Equações aproximadas para o modelo de St. Louis

I. Equação da despesa total:

A) Período de amostragem: I/1953 — IV/1968:

$$\underset{}{\Delta Y_t} = \underset{(2{,}69)}{2{,}30} + \underset{(6{,}69)}{5{,}35\,\Delta M_{t-1}} + \underset{(0{,}15)}{0{,}05\,\Delta E_{t-1}}$$

II. Equação dos preços:

A) Período de amostragem: I/1955 — IV/1968:

$$\Delta P_t = \underset{(6{,}60)}{2{,}95} + \underset{(9{,}18)}{0{,}09\,D_{t-1}} + \underset{(5{,}01)}{0{,}73\,\Delta P_t^A}$$

III. Equação da taxa de desemprego:

A) Período de amostragem: I/1955 — IV/1968:

$$U_t = \underset{(67{,}42)}{3{,}94} + \underset{(1{,}33)}{0{,}06\,G_t} + \underset{(6{,}15)}{0{,}26\,G_{t-1}}$$

IV. Taxa de juro a longo prazo:

A) Período de amostragem: I/1955 — IV/1968:

$$R_t^L = \underset{(4{,}63)}{1{,}28} + \underset{(-2{,}40)}{0{,}05\,\dot{M}_t} + \underset{(8{,}22)}{1{,}39\,Z_t} + \underset{(2{,}55)}{0{,}20\,\dot{X}_{t-i}} + \underset{(11{,}96)}{0{,}97\,\dot{P}/(U/4)_{t-i}}$$

V. Equação da taxa de juro a curto prazo:

A) Período de amostragem: I/1955 — IV/1968:

$$U_t^S = \underset{(-2{,}43)}{-0{,}84} - \underset{(-3{,}72)}{0{,}11\,M_t} + \underset{(2{,}78)}{0{,}50\,Z} + \underset{(9{,}28)}{0{,}75\,\dot{X}_{t-i}} + \underset{(12{,}24)}{1{,}06\,\dot{P}/(U/4)_{t-i}}$$

O significado dos símbolos é o seguinte:

- ΔY = variação em dólares da despesa total (PNB a preços correntes);
- ΔM = variação em dólares da massa monetária;

- ΔE = variação em dólares das despesas federais para manutenção de empregos;
- ΔP = variação em dólares da despesa total (PNB a preços correntes) devida à variação de preços;
- $D = Y - (X^F - X)$;
- X^F = produto potencial;
- X = produto (PNB a preços de 1958);
- ΔP^A = previsão da variação dos preços (convertida em dólares);
- U = desemprego expresso em percentagem da força de trabalho;
- $G = ((X^F - X)/X^F) \cdot 100$;
- R^L = taxa sazonal de Moody para as taxas das obrigações AAA;
- $\dot{M}$ = taxa de variação anual da massa monetária;
- Z = a variável muda (0 de I/1955 até IV/1960) e (1 de I/1961 até ao fim do período de regressão);
- $\dot{X}$ = taxa de variação anual do produto (PNB a preços de 1958);
- $\dot{P}$ = taxa de variação anual do deflator do PNB (1958 = 100);
- $U/4$ = índice de desemprego como percentagem da força de trabalho (base = 4,0);
- R^S = *prime rate* do papel comercial para prazos de quatro a seis meses.

Fonte: L. C. Anderson e K. Carlson, «St. Louis model revisited», in *Econometric Model Performance,* Klein e Burmeister, Univ. of Penns. Press, 1976.

A economia matemática prevê o rumo da economia por meio de modelos como este.

Quando, para além destas, consideramos também as teorias modernas da economia matemática, deparamos com um amplo espectro de matemática superior em uso. A ferramenta mais importante é a teoria das equações diferenciais e de outras equações funcionais. A teoria de pontos fixos para a existência de equilíbrios é também importante. A teoria dos ciclos económicos possui contrapartidas na física matemática. Rara é a área da matemática que não possa ser posta ao serviço da economia. Ainda muito recentemente se aplicou a teoria da análise não standard, descobrindo-se um paralelo entre as pequenas empresas individuais e os infinitesimais. Embora o material referido represente contributos da matemática para a economia, o inverso também se verifica: a economia também contribui para a matemática. É assim que o movimento browniano entra na literatura matemática através dos primeiros trabalhos de L. Bachelier sobre os movimentos na bolsa.

Do ponto de vista mecânico (ou electrónico), as exigências das grandes empresas e das grandes agências estatais conduziram a uma grande

variedade de máquinas de cálculo (basta pensar no B de IBM*). Isso, por um lado, promoveu um novo ramo do saber matemático, conhecido por ciência da computação, que combina características lógicas, linguísticas, combinatórias e numéricas. Por outro lado, a existência dessas máquinas influenciou e alterou o funcionamento e as atitudes das próprias empresas (pensemos nos cartões de crédito). Torna-se, pois, evidente uma forte interacção entre a matemática e os negócios, e se, como o proclamou Calvin Coolidge, a actividade da nação são os negócios**, é de esperar que esta forte interacção recíproca se fortaleça.

A um nível ainda mais profundo, pode levantar-se a questão das relações entre as circunstâncias socioeconómicas e toda a ciência, tecnologia e matemática. É aquilo a que Joseph Needham chama o grande debate da história da ciência. Analisamos seguidamente um exemplo saliente desta relação.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. Goldstine, A. Littleton e B. Yamey.

2. A matemática e a guerra

Conta-se que Arquimedes colocou a sua ciência ao serviço da guerra. Atribui-se-lhe a invenção de roldanas múltiplas para lançar galés ao mar, a concepção de uma multiplicidade de catapultas e de máquinas militares e, o que é mais espectacular de tudo, a focagem dos raios solares sobre navios sitiantes usando um espelho parabólico. Tudo isto ao serviço do rei Héron de Siracusa quando estava sob ataque dos Romanos. Ora, Arquimedes era o cientista e o matemático mais brilhante do seu tempo, mas os feitos acima citados, embora explicáveis por teorias matemáticas da mecânica e da óptica, não parecem ter envolvido a matemática ao nível da aplicação básica.

Qual a relação entre a matemática e a guerra? De início, o seu contributo era escasso. Alguns escribas matemáticos para o recenseamento e para tratarem do alistamento no exército. Uns escriturários para manterem o regulamento e a intendência. Talvez um pouco de levantamento topográfico e de navegação. Na qualidade de astrólogos, o principal contributo dos antigos matemáticos foi, provavelmente, a consulta das

* IBM — International Business Machines. *(N. do T.)*

** *The business of the country is business* no original. *(N. do T.)*

estrelas para avisarem os governantes sobre o que o futuro lhes reservava. Por outras palavras, serviço de informações militares*.

Segundo algumas autoridades, a guerra moderna começou com Napoleão, e é com Napoleão que começa a notar-se uma intensificação do envolvimento da matemática. A Revolução Francesa encontrou na França de então um brilhante regimento de matemáticos, porventura o conjunto mais brilhante da sua história: Lagrange, Condorcet, Monge, Laplace, Legendre, Lazare Carnot. Condorcet fora ministro da Marinha em 1792; Monge publicou um livro sobre o fabrico de canhões. Sob o domínio de Napoleão, a matemática continuou a prosperar. Existem relatos segundo os quais o próprio Napoleão gostava de matemática. Monge e Fourier acompanharam Napoleão nas suas campanhas em Itália e no Egipto, e, mesmo que estes homens não tenham feito nada de matemático durante estas campanhas militares (Monge supervisionou as pilhagens de guerra, enquanto Fourier fazia a descrição do Egipto), fica-se com a impressão de que Napoleão via nos matemáticos pessoas que era útil ter por perto.

Chegando à Segunda Guerra Mundial, encontramos uma utilização generalizada de talento matemático e científico no exército, na marinha, na força aérea, em laboratórios de investigação estatais, em indústrias bélicas, em agências estatais, sociais e privados. Numa curta lista daquilo que é devido aos matemáticos teria de figurar a aerodinâmica, a hidrodinâmica, a balística, a invenção do radar e do sonar, o desenvolvimento da bomba nuclear, a criptografia e os serviços secretos, a fotografia aérea, a meteorologia, a investigação operacional, o desenvolvimento de computadores, a econometria, a balística de foguetes, o desenvolvimento de teorias da realimentação e de controle. Muitos professores de Matemática, assim como muitos dos seus alunos, estiveram directamente ligados a esses projectos. O autor esteve empregado como matemático-físico na NACA (que depois viria a ser a NASA), em Langley Field, na Virgínia, sem qualquer outra habilitação para além do seu bacharelato, e muitos dos seus contemporâneos em Langley Field viriam depois a ocupar cátedras de Matemática por todo o país.

Com a explosão da bomba nuclear sobre o Japão e o subsequente aperfeiçoamento de bombas mais potentes, os físicos atómicos, que até aí tinham vivido numa torre de marfim, experimentaram uma sensação de pecado. Esta sensação de pecado espalhou-se também sobre a comunidade matemática. Os matemáticos perguntaram a si mesmos de que forma haviam contribuído pessoalmente para soltarem monstros sobre o

---

* *Millitary intelligence* no original. *(N. do T.)*

mundo e, se realmente o haviam feito, como poderiam conciliar isso com as próprias posições filosóficas em relação à vida. A matemática, outrora considerada uma disciplina remota e olímpica, surgiu subitamente como algo capaz de causar destruição física, social e psicológica. Alguns matemáticos começaram a dividir a sua disciplina numa parte boa e numa parte má. A parte boa: a matemática pura — quanto mais abstracta, melhor. A parte má: qualquer matemática aplicada. Alguns matemáticos e uma geração de alunos que despontava nessa altura deixaram para sempre as aplicações. Norbert Wiener, que se tinha dedicado ao desenvolvimento de teorias de previsão e de controle por realimentação, renunciou ao apoio do Estado para o seu trabalho e dedicou o resto da sua vida a «trabalhos bons» em biofísica e a fazer propaganda contra o uso desumano de seres humanos.

À Segunda Guerra Mundial seguiu-se a guerra fria, durante a qual se deu o choque do *Sputnik.* O redobrar dos esforços em actividades espaciais e a criação de toda a indústria de computadores praticamente *ex nihilo* proporcionaram emprego a vários milhares de matemáticos.

Durante os protestos contra a guerra do Vietname foram lançados ataques físicos contra instituições matemáticas. Dois dos principais pólos de investigação em matemática aplicada estão situados na Universidade de Nova Iorque e na Universidade de Wisconsin. Na NYU existe um importante centro de cálculo sob a responsabilidade da Energy Research and Development Authority — a antiga Atomic Energy Comission. Num edifício no Wisconsin funciona o Mathematics Research Center — o antigo Army Mathematics Research Center. Em 1968 explodiu uma bomba no centro de cálculo em Madison, vitimando um aluno de doutoramento que nessa noite trabalhava aí até mais tarde. Na NYU o centro de cálculo foi ocupado e foi feita uma tentativa gorada para fazê-lo explodir.

Muitos opositores à guerra consideravam imoral trabalhar em instituições patrocinadas pelas forças armadas. Já não interessava se se trabalhava ou não em problemas bélicos; considerava-se que as instituições, globalmente, haviam sido contaminadas pelo mal.

Começou a ouvir-se dizer que a primeira guerra fora a guerra dos químicos, que a segunda guerra fora a guerra dos físicos e que a terceira guerra (esperemos que nunca chegue) seria a guerra dos matemáticos. Com tudo isto, o público tomou plenamente consciência de que a matemática está intrinsecamente ligada ao tecido global da vida, de que a matemática é boa ou má, conforme as pessoas o queiram, e de que nenhuma actividade do espírito humano está livre de ser objecto de considerações morais.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

N. P. Davis; H. Goldstine [1972]; J. Needham, vol. III, p. 167.

3. O misticismo dos números

«Nós, herdeiros de três séculos de ciência», escreve Sir Kenneth Clark no seu maravilhoso *Landscape into Art,* «mal podemos imaginar um estado de alma em que todos os objectos materiais sejam olhados como símbolos de verdades espirituais ou de episódios de história sacra. Contudo, a menos que façamos este esforço de imaginação, a arte medieval será, em grande parte, incompreensível.» Nós, herdeiros de três séculos recentes de desenvolvimento científico, mal podemos imaginar um estado de alma em que todos os objectos matemáticos sejam olhados como símbolos de verdades espirituais ou de episódios de história sacra. Contudo, a menos que façamos este esforço de imaginação, uma fracção da história da matemática será, em grande parte, incompreensível.

Veja-se como Plutarco (40 d. C.-120 d. C.), ao descrever o culto a Ísis no Egipto, confunde história sacra com teoremas matemáticos:

> Os Egípcios contam que a morte de Osíris se deu a dezassete (do mês), quando é mais evidente o minguar da lua cheia. Chamam por isso os pitagóricos a esse dia o «obstructor» e abominam-no completamente. Pois o número dezassete, interpondo-se entre o quadrado dezasseis e o rectangular dezoito, os dois únicos números em todo o plano a terem os seus perímetros iguais à área que rodeiam*, separa-os e aparta-os um do outro, sendo dividido em partes desiguais na razão de nove para oito. Dizem alguns que o número vinte e oito foi o da duração em anos da vida de Osíris, enquanto outros dizem que foi a duração do seu reinado; pois é esse o número das iluminações da lua, que completa nesse número de dias o próprio ciclo. Quando cortam a madeira nos chamados funerais de Osíris, preparam um baú em forma de crescente por a lua tomar a forma de crescente e sofrer um eclipse sempre que se aproxima do Sol. Interpreta-se o esquartejamento de Osíris em catorze partes relacionando-o com os dias em que o planeta mingua desde a lua cheia até à lua nova.

«Tudo é número», disse Pitágoras, e o misticismo dos números leva mesmo a sério esta máxima. O universo é governado em todos os seus aspectos pelo número e pelas suas idiossincrasias. Três é a trindade, seis é o número perfeito e 137 era a constante de estrutura fina de Sir Arthur Eddington, um místico dos números e um físico consagrado:

---

* É um teorema engraçado. Demonstre-o.

Corria o ano de 1240, o ano mais glorioso do reinado de Frederico II da Sicília, quando a Europa ocidental foi varrida por rumores acerca de um grande monarca do Extremo Oriente que dominava um vasto reino e que, lenta mas inflexivelmente, se encaminhava para ocidente. Reino muçulmano sobre reino muçulmano havia já sucumbido à sua espada. Alguns cristãos interpretaram estas notícias como um presságio da chegada do lendário Preste João, que se aliaria aos reis do Ocidente em Jerusalém e que decidiria inapelavelmente a ruína da religião islâmica. Os judeus na Europa, por motivos que explicaremos de seguida, acreditavam que esse monarca oriental seria o messias, o herdeiro de David, e dispuseram-se a partir ao seu encontro para o acolherem em alegria e celebração. Outros cristãos, embora concordando com a interpretação messiânica, acreditavam que o próprio Frederico, *stupor et dominus mundi,* maravilha e senhor do mundo, um dos mais notáveis intelectos que jamais ocupara um trono, era o messias prometido.

Ora, como se chegou à conclusão de que o messias estava para chegar? Simplesmente porque o ano de 1240 no calendário cristão correspondia ao ano de 5000 no calendário judeu e porque, segundo algumas teorias, o messias deveria surgir no início do sexto milénio. Temos aqui um exemplo de misticismo dos números que é incrível para o espírito moderno. (Saciamos agora a curiosidade do nosso leitor revelando que o rei oriental não era nem Preste João, nem o messias, mas sim Batucão, filho de Gengiscão e o fundador da Horda Dourada, que foi chacinando tudo no seu caminho até chegar a Liegnitz, na Silésia.)

Porém, o sagrado funde-se imperceptivelmente com o útil. Segundo Henry Cornelius Agrippa, um popular mago filósofo do século XVI, a matemática é absolutamente indispensável para a magia, «pois tudo o que se consegue por meio natural é determinado pelo número, pelo peso e pela medida. Um mago que entenda a filosofia natural e a matemática e que conheça as ciências intermédias que delas provêm — a aritmética, a música, a geometria, a óptica, a astronomia, a mecânica — pode conseguir maravilhas*». Uma das formas em que o misticismo dos números se revela é a arte da gematria (a própria palavra deriva de «geometria»). A gematria baseia-se no facto de as letras nos alfabetos clássicos de latim, grego e hebreu terem normalmente equivalentes numéricos. Na sua forma mais simples, a gematria identifica palavras com números e interpreta os equivalentes verbais.

Eis um exemplo contemporâneo de Frederico II. O nome *Innocentius Papa* (Papa Inocêncio IV) tem o equivalente numérico 666. Este é o

---

* Francis Yates, *Giordano Bruno and the Hermetic Tradition.*

«número da besta» de *Revelações,* 13, 18, donde se conclui que Inocêncio é o Anticristo. (Frederico era violentamente antipapa.)

Mas que tolice e que lixo intelectual é este, perguntamo-nos (especialmente quando tomamos consciência de que raciocínios como este podem ter estado na base de política pública)? Espera-se que o raciocínio político contemporâneo seja firmado em chão mais sólido. No entanto, estes raciocínios e estes pontapés nos números podem ter promovido capacidades e interesses numéricos que compensaram em muito os estragos feitos.

Um número, especialmente um número sagrado, era para o espírito medieval uma manifestação de ordem divina e espiritual. Podia ser transformado em princípio estético. Apresentamos como exemplo uma análise feita recentemente por Horn a um plano concebido em 816 para uma comunidade monástica em Aachen, o chamado «plano de Saint Gall». Horn descobre que na sua concepção o arquitecto teve sempre em atenção os números sagrados 3, 4, 7, 10, 12 e 40, usando-os constantemente. Evitamos as credenciais ou os certificados de santidade destes números em especial e passamos desde já aos pormenores arquitectónicos.

O plano consiste em três áreas principais — oriental, central e ocidental. Existem três áreas de edifícios, três claustros, três padarias e cervejarias, três balneários, três enfermarias, três jardins murados, três galinheiros e três casas de moagem.

Encontramos quatro estruturas circulares, quatros altares no transepto e quatro em cada coxia e ainda quatro peças de mobília litúrgica na nave. São quatro as fileiras para plantação. O quatro participa ainda nos módulos elementares do traçado.

O núcleo da comunidade é constituído por sete edifícios. São também sete os degraus que elevam o presbitério, como sete são as secretárias para os escribas no *scriptorium.* O dormitório dos monges abriga setenta e sete camas. As estações litúrgicas no eixo da igreja são sete. Em toda a igreja existem dezassete (10 + 7) altares e em todo o plano existem vinte e um (3 × 7).

Não vamos prosseguir o extenso catálogo de números sagrados compilado por Horn até quarenta. O céptico que veja nestas ocorrências meros acasos ou uma simples indicação de que qualquer número pode ser decomposto numa soma ou num produto de uma lista de números sagrados, à imagem do teorema da decomposição em primos ou na conjectura de Goldbach (v. capítulo 5), deve tentar estudar a planta do *holiday inn* mais próximo e descortinar o plano sagrado que superintendeu ao seu desenho.

Giordano Bruno
1548-1600

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. Griffiths; W. Horn; E. Kantorowicz; F. Yates.

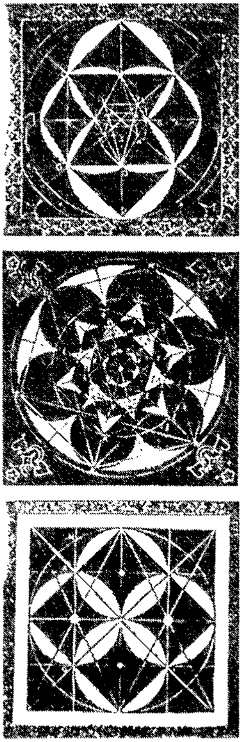
4. A geometria hermética

O sonho da magia filosófica (não confundir com a magia de feitiçaria) tem persistido ao longo dos milénios. Uma das suposições fundamentais desta magia é a de que as forças espirituais do universo podem ser induzidas a penetrar e a influenciar as forças materiais. O espiritual é celeste, o material é terreno. As formas terrenas são frequentemente representadas por figuras geométricas e, enquanto tal, crê-se serem aspectos das formas celestiais puras. Através de representação e de disposição adequadas, a figura material induz uma ressonância solidária com o seu correlativo celeste e, como resultado, a figura ganha força de talismã. Esta força é então aplicada a fins puramente práticos — a cura de doenças, o sucesso nos negócios, a destruição dos inimigos, o erotismo prático e muitos mais.

Na figura ao lado estão representadas três obras de arte de geometria hermética que datam de 1588. Constam do livro *Articuli... adversus... mathematicos atque philosophos,* escrito por Giordano Bruno. Bruno era um ex-dominicano, um filósofo brilhante e um mago filósofo.

Esta figuras surgem-nos hoje como padrões agradáveis que ficariam bem a ladrilhar um chão. Supomos que a disposição não era arbitrária, mas que foi criada segundo algum princípio. Muitos julgaram já (e outros julgam ainda) terem descoberto as chaves para o universo. Não devemos desdenhar uma chave que apenas dê acesso a uma câmara de somenos importância.

Uma quarta figura hermética é o hieróglifo mágico de John Dee (1564). Poderá fazer lembrar o símbolo da paz do início da década de 70.



Figuras herméticas

Fonte: Giordano Bruno, *Articuli centum et sexaginta adversus huius tempestatis mathematicos atque philosophos,* Praga, 1588 (pp. 313 e segs.)

O hieróglifo de Dee

As propriedades matemáticas e mágicas deste símbolo foram publicadas num livro intitulado *Monas Hieroglyphica,* onde se explica a sua construção e interpretação através de uma série de «teoremas». O leitor deve comparar o material teoremático aqui apresentado com o de Euclides, que consta do capítulo 5.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

G. Bruno; J. Dee; C. Josten; F. Yates.

5. Astrologia

O papel da astrologia no desenvolvimento da matemática, da física, da tecnologia e da medicina tem sido ao mesmo tempo deturpado e menosprezado; a comunidade erudita contemporânea tem vindo a restabelecer a perspectiva adequada de olhar esta actividade. O que aqui temos é uma pré-ciência e uma ciência malograda. Apenas podemos colocar-lhe o rótulo de falsa ou de pseudociência quando é praticada com intenção consciente de defraudar.

As raízes da astrologia podem encontrar-se na Babilónia do século IV a. C., se não mesmo num período anterior. A astrologia e a adivinhação estavam disseminadas pelo Oriente e encontramo-las ainda hoje como parte integral da vida em várias regiões orientais. No Ocidente observam-se vestígios da astrologia como uma espécie de cultura popular que se manifesta na numerologia de jornal, nos horóscopos feitos por computador e nos livros do zodíaco.

A astrologia já cresceu, definhou e voltou a crescer. Foi por vezes denunciada como superstição — superstição pagã, naturalmente. Desempenhou papéis oficiais em governos e regimes religiosos, foi injuriada e proscrita, foi considerada imoral e iníqua; foi considerada heresia, por negar o livre-arbítrio. Foi tolerada e ignorada. Foi até utilizada como provocação, como, por exemplo, quando o famoso matemático e físico Cardano calculou o horóscopo de Jesus. Quando, no século XVI, foi honestamente estudada como ciência, não pôde senão influenciar o rumo da descoberta científica.

A astrologia tem origem na crença de que os corpos celestes afectam os interesses dos homens. Acredita-se que a posição da Lua e dos planetas, à medida que se deslocam sobre o cenário das constelações do zodíaco, exerce uma influência decisiva sobre o destino de indivíduos, de reis e governantes e de nações. Ninguém pode negar que há nisso alguma ver-

12

MONAS HIEROGLYPHICA:

IOANNIS DEE, LONDINENSIS,

Mathematicè, Magicè, Cabaliſticè, Anagogicéque, explicata: Ad

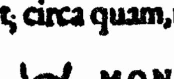
SAPIENTISSIMVM,
ROMANORVM, BOHEMIAE, ET HVNGARIAE,
REGEM,
MAXIMILIANVM.

THEOREMA I.

PEr Lineam rectam, Circulumq́ue, Prima, Simpliciſſimaq́ue fuit Rerum, tum, non exiſtentiũ, tum in Naturæ latentium Inuolucris, in Lucem Productio, repreſentatioq́ue.

THEOREMA II.

AT nec ſine Recta, Circulus; nec ſine Puncto, Recta artificioſè fieri poteſt. Puncti proinde, Monadisq́ue ratione, Res, & eſſe cœperũt primò: Et quæ peripheria ſunt affectæ, (quantæcũque fuerint) Centralis Puncti nullo modo carere poſſunt Miniſterio.



THEOREMA III.

MOnadis, Igitur, Hieroglyphicae Conſpicuũ Centrale Punctum, Terram refert; circa quam, tum Sol tum Luna, reliquiq́ue Planetæ ſuos conficiunt Curſus. Et in hoc munere, quia dignitatem Sol obtinet ſummam, Ipſum, (per excellentiam,) Circulo notamus Integro, Centroq́ue Viſibili.

MONAS HIERO-GLYPHI-CA.

THEO-

Reprodução e tradução do latim para inglês por C. H. Josten, Ambix, vol. 12 (1964)

A MÓNADE HIEROGLÍFICA
(de John Dee, Londres)

matematicamente, magicamente, cabalisticamente e analogicamente explicada, e em dedicação ao sapientíssimo Maximiliano, Rei dos Romanos, da Boémia e da Hungria

TEOREMA I

A manifestação e a representação mais elementar e a mais simples de qualquer coisa, inexistente ou oculta num recôndito da Natureza, deram-se por meio da linha recta e do círculo.

TEOREMA II

Porém, não é possível fazer o círculo sem a linha recta e a linha recta sem o ponto. Por consequênca, tudo começou com o ponto e uma mónade. E o que diz respeito à periferia (por maior que seja) não pode de forma alguma existir sem o auxílio de um ponto central.

TEOREMA III

Portanto, o ponto central que se observa no centro da mónade hieroglífica representa a Terra, em redor da qual o Sol, a Lua e os outros planetas seguem o seu trajecto. E, por nesse exercício ocupar o Sol a mais alta dignidade, representamo-lo (pela razão da sua superioridade) por um círculo perfeito, com um centro visível.

---

dade. Não é o Sol que fornece a energia à nossa vida? Não é verdade que as variações na sua radiação interferem nas condições atmosféricas e na transmissão de rádio? Não são o Sol e a Lua que em conjunto controlam as marés? É ou não verdade que, segundo um cosmólogo moderno, a existência de matéria nos cantos mais remotos do universo contribui para a gravidade, que impede a nossas bolas de ténis de se evaporarem? Como é grandiosa esta concepção do universo: une o imenso ao minúsculo, o próximo ao longínquo. Este é o grande desígnio e o problema que se coloca passa a ser: como poderemos decifrar este desígnio em nosso benefício?

Entre as formas clássicas de astrologia encontram-se a genetlialogia, a astrologia catártica e a astrologia interrogatória, todas relacionadas entre si. A genetlialogia afirma que os presságios celestes presentes no momento em que nascemos afectarão o desenrolar das nossas vidas. Para prever esse desenrolar é necessário conhecer com exactidão o local e momento de nascimento. Há que determinar a posição dos planetas e calcular certas relações entre eles, como conjunções e oposições.

THEOREMA IIII.

LVnæ Hemicyclium, licet hic, Solari sit Circulo quasi Superius Priusque: Tamen Solem tanquam Dominum, Regemque suum obseruat: eiusdem Forma ac vicinitate adeo gaudere videtur, vt & illum in Semidiametri æmuletur Magnitudine, (Vulgaribus apparente hominibus,) & ad eundem, semper suum conuertat Lumen: Solaribusque ita tandem imbui Radijs appetat, vt in eundem quasi Transformata, tota disparet Cælo: donec aliquot post Diebus, omnino hac qua depinximus, appareat corniculata figura.

THEOR. V.

ET Lunari certè Semicirculo ad Solare complementum perducto: Factum est Vespere & Mane Dies vnus. Sit ergo Primus, quo Lux est facta Philosophorum.

THEOR. VI.

SOlem, Lunamque, Rectilineæ Cruci, inniti, hic videmus. Quæ, tum Ternarium, tum Quaternarium, appositè satis, ratione significare Hieroglyphica, potest. Ternarium quidem: ex duabus Rectis, & Communi vtrisque, quasi Copulatiuo Puncto. Quaternarium vero: ex 4. Rectis, includentibus 4. Angulos rectos. Singulis, bis, (ad hoc) repetitis; (Sicque, ibidem, secretissimè, etiam Octonarius, sese offert; quem, dubito an nostri Prædecessores, Magi, vnquam conspexerint: Notabisque maxime.) Primorū Patrum, & Sophorum Ternarius, Magicus, Corpore, Spiritu, & Anima, constabat. Vnde, Manifestum hic Primarium habemus Septenarium. Ex duabus nimirum Rectis, et Communi Puncto: Deinde ex 4. Rectis, ab Vno Puncto, sese, Separantibus.

THEOR.

TEOREMA IIII

Embora o semicírculo da Lua surja aqui, por assim dizer, acima do círculo solar e pareça mais importante do que este, ela respeita o Sol como ao seu amo e rei. Parece deleitar-se tanto com a sua forma e proximidade que emula a medida do seu raio (como o julga o leigo) e dirige sempre a sua luz na sua direcção. E tal é, na verdade, o seu desejo de receber os raios solares que quando, por assim dizer, se transforma nele, desaparece completamente do céu até que, volvidos alguns dias, volta a surgir com a forma de crescente, exactamente como a representámos.

TEOREMA V

E, certamente, um dia foi criado com crespúsculo e manhã[38], unindo o semicírculo lunar ao seu complemento solar. Seja também assim no primeiro [dia] em que se acendeu a luz dos filósofos.

TEOREMA VI

Vemos Sol e Lua pousados sobre uma cruz rectilínea que, pela interpretação hieroglífica, pode apropriadamente significar tanto o ternário como o quaternário: o ternário [na medida em que] consiste em duas linhas rectas e o ponto que têm em comum e que, por assim dizer, as une; o quaternário [na medida em que] consiste em quatro linhas rectas, incluindo quatro ângulos rectos, sendo (para o efeito) cada [linha] repetida duas vezes[39]. (E eis que surge aqui também o octonário de forma secretíssima, o qual duvido de que tenha sido alguma vez contemplado pelos *magi* nossos predecessores e o qual o leitor notará com especial atenção.) O ternário mágico dos [nossos] primeiros antepassados e sábios consistia em corpo, espírito e alma. Por consequência, podemos observar aqui a manifestação de uma extraordinária heptária, composta, veja-se, por duas linhas rectas e pelo ponto que têm em comum e pelas quatro linhas rectas que emanam de um ponto.

Etc., etc. No total: vinte e três «teoremas».

A astrologia catártica afirma que qualquer acto é influenciado pelos presságios celestes presentes no momento em que se inicia esse acto. É, consequentemente, possível indicar datas auspiciosas para a ocorrência de acontecimentos importantes a partir do conhecimento das futuras posições dos planetas.

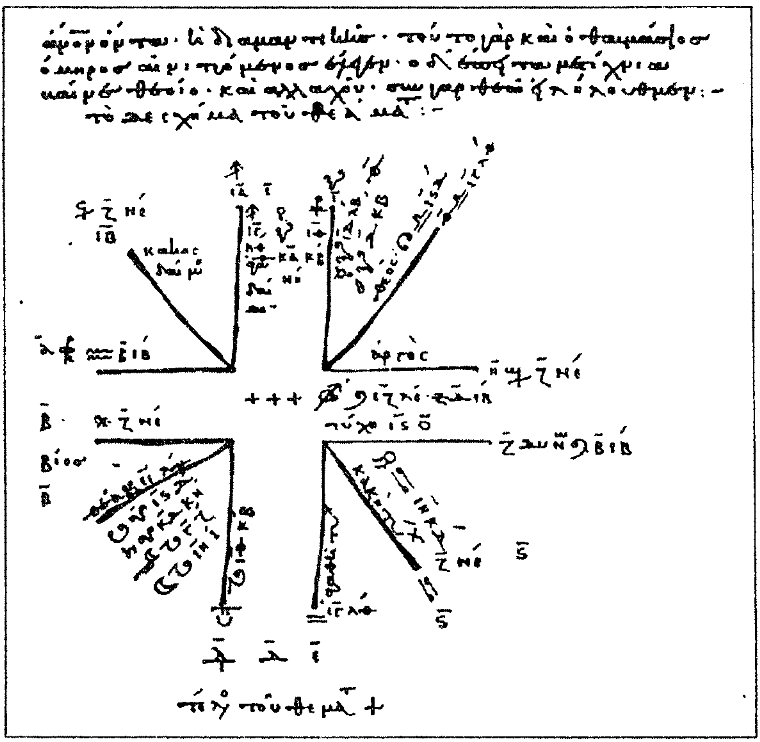
---

[38] Cf. *Génesis,* I, 5.

[39] Esta passagem é algo obscura. Significa que, quando se considera que a cruz é formada por quatro ângulos rectos, cada um dos quatro pares de linhas que os formam coincidem em cada linha.

A astrologia interrogatória provoca toda a espécie de questões. Onde perdi a carteira? Deverei casar com tal pessoa? Afirma que o momento da interrogação afecta a resposta correcta. A astrologia revela-se, pois, uma fonte de respostas num mundo cheio de problemas difíceis e onde o conselho é raro e de qualidade duvidosa.

Dada a complexidade dos seus algoritmos, a prática da astrologia nas suas formas mais intensivas exigia conhecimentos de astronomia, de matemática, de medicina e de muito mais. Quando chegava um paciente com uma queixa, a primeira coisa a fazer era calcular o seu horóscopo. Isso seria feito com base na informação disponível sobre o momento em que nascera. Existiam almanaques que indicavam ao astrólogo o estado dos céus nesse instante. Como poderia saber-se o momento do nascimento? Esta era, lembremo-nos, uma época em que a pessoa comum não sabia ler nem escrever, em que saber o número de quilómetros entre Londres e Cantuária



Horóscopo grego datado de 28 de Outubro de 497

Fonte: Neugebauer e van Hoesen

era apontado como uma das grandes razões para aprender aritmética. Todavia, dado um horóscopo, ainda que aproximado, o astrólogo-matemático-físico passaria à análise dos sintomas do paciente (em especial a cor da urina) e chegaria então a uma receita. Esta era a consulta de dez dólares.

Como é natural, se o paciente pertencesse à nobreza ou ao clero ou fosse astrólogo, então, uma primeira aproximação era considerada insuficiente. Exigia-se um horóscopo exacto e isso, evidentemente, custaria cem dólares. Isso criou uma procura por tabelas de posições planetárias mais precisas, por instrumentos cuja precisão fosse superior à dos astrolábios e dos teodolitos vulgares, por relógios exactos e por formas convenientes e rigorosas de cálculo matemático. Assim, para se ser médico, por exemplo, no século XIII, ter-se-ia, idealmente, de ser também ervanário, alquimista, matemático, astrónomo e fabricante de instrumentos científicos. Esta procura por medidas exactas de tempo e de posição leva-nos, através de Brahe, Kepler, Galileu e Newton, até à física e à matemática contemporâneas.

Os astrólogos devem ter tido bastantes sucessos importantes. Mesmo o lançamento de uma moeda é muitas vezes um dispositivo útil para a tomada de decisões e a lei das médias diz-nos que deverá acertar de quando em vez. E, de facto, conta-se o espectacular resultado que John Dee obteve para a jovem rainha Isabel de Inglaterra. Sendo-lhe pedido que indicasse uma data auspiciosa para a coroação de Isabel I, Dee praticou o seu ofício e apontou a data que deu início ao domínio mundial inglês que durararia mais de três séculos.

Embora fosse uma pré-ciência, e ainda que muitos dos seus praticantes a estudassem segundo o espírito da moderna pesquisa científica, a astrologia revelou-se a longo prazo um falhanço, sendo uma de muitas teorias frustradas, apesar de possuir um núcleo matemático. O modelo da realidade que fornecia era incorrecto, o que levou ao seu declínio e à sua trivialização intelectual.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

D. Pingree; L. White, Jr.

6. A religião

A matemática, segundo uma posição mais antiga, é a ciência do espaço e da quantidade; segundo uma posição mais recente, é a ciência do padrão e da estrutura dedutiva. Desde os Gregos que a matemática é

também a ciência do infinito. Hermann Weyl especula que a presença do infinito na matemática é paralela à intuição religiosa:

> [...] a própria investigação puramente matemática, estão disso convencidos grandes pensadores, e devido à sua natureza excepcional, pela sua exactidão e pelo seu rigor, eleva o espírito humano a uma proximidade do divino maior do que é alcançável por qualquer outro meio. A matemática é a ciência do infinito, o seu objectivo é a compreensão simbólica do infinito por meios humanos, logo finitos. A grande façanha dos Gregos foi terem tornado a distinção entre finito e infinito proveitosa à percepção do mundo. Vinda do Oriente, a intuição religiosa do infinito, o apeiron, apodera-se da alma grega. [...]
>
> A tensão entre o finito e o infinito e a sua reconciliação tornam-se então os motivos que impelem a investigação matemática grega.

Hermann Weyl
1885-1955

Tal como a matemática, a religião exprime relações entre o homem e o universo. Cada religião procura encontrar o enquadramento ideal que guie a vida do homem e definir práticas destinadas a atingir esse ideal. Cada religião elabora também uma teologia que afirma a natureza de Deus e a relação entre Deus e o homem. Na medida em que tem como objecto um conhecimento ideal e estuda as relações entre esse ideal e o mundo tal como o conhecemos, a matemática tem algo em comum com uma religião. Se os objectos da matemática são objectos conceptuais cuja realidade assenta na consciência comum a todas as mentes humanas, então esses conceitos matemáticos partilhados poderão constituir o dogma da fé matemática.

O autor tem a impressão de que a maioria dos cientistas e dos matemáticos contemporâneos são agnósticos, ou, se professam alguma religião, mantêm-na afastada da sua ciência. Aquilo que poderemos descrever como a «posição científica convencional» vê na matemática o exemplo mais saliente de um domínio em que reina a razão e onde a emoção não tem lugar, onde o saber é seguro e sabemos exactamente quanto sabemos, onde as verdades de hoje são as verdades de sempre. Esta posição vê a religião, pelo contrário, como um reino de pura fé que se mostra insensível à racionalidade. De acordo com esta posição, todas as religiões são semelhantes, uma vez que todas são igualmente impossíveis de verificar ou de justificar.

Contudo, esta dicotomia que se sente entre a matemática e a religião, embora muito difundida hoje, não é universal; ao longo dos séculos houve modos proveitosos de interacção entre a matemática e a religião.

Motivos de ordem religiosa, por exemplo, estimularam algumas formas de criação e de prática matemáticas. Eruditos como A. Seidenberg investigaram as origens da contagem e da geometria em rituais antigos. Até que ponto terá o desenvolvimento do calendário sido influenciado e favorecido por uma vontade de uniformizar acontecimentos rituais periódicos?

Tal como vimos em relação ao simbolismo dos números e ao misticismo dos números, a prática religiosa pode ser influenciada pela matemática.

A um nível algo mais profundo de influência cultural, podemos ver como a noção matemática de demonstração contribui para o desenvolvimento da teologia. Os escolásticos medievais procuravam demonstrações racionais de teoremas teológicos que permitissem estabelecer QED (questões dogmáticas).

Nicolau de Cusa (1450) acreditava que o verdadeiro amor divino é *amor Dei intellectualis* e que a matemática é o acto intelectual pelo qual o divino se revela. (É possível alcançar o divino seguindo muitos caminhos: pelo asseio, por exemplo, ou pela falta dele, como no caso dos frades do deserto. Nicolau afirma que o divino só é atingível pela inteligência.)

O epigramista romântico alemão Novalis (Friedrich von Hardenberg, m. 1801) afirmou que «a matemática pura é religião», porque, e como explicou mais tarde, em 1925, o coreógrafo Oskar Schlemmer, «é o supremo, o mais requintado e o mais delicado». Novalis, que havia lido uma boa quantidade de matemática contemporânea, escreveu também: «Das Leben der Götter ist Mathematik»* e «Zur Mathematik gelangt Man nur durch eine Theophanie»**.

Como outros exemplos desta tendência, consideremos a forma como Espinosa se refere à ética, *more geometrico,* e a afirmação de John Locke em *An Essay on Human Understanding:*

> É, pois, por esta razão que tenho a ousadia de pensar que a moralidade é passível de demonstração, da mesma maneira que a matemática: uma vez que a essência real e exacta daquilo que as palavras morais designam pode ser conhecida, assim também a congruência e a incongruência delas próprias poderão certamente ser discutidas; nisso consiste o conhecimento perfeito.

Reciprocamente, as posições do mundo religioso postularam sempre a matemática como um paradigma para o pensamento divino. A freira

* «A vida do Senhor é a matemática», em alemão no original. *(N. do T.)*

** «À matemática chega-se somente por uma teofania», em alemão no original. *(N. do T.)*

dramaturga Hrosvita de Gandersheim (980) atribui, na sua peça *Sapientia,* depois de uma discussão sofisticada e um tanto extensa sobre certos factos da teoria dos números, a seguinte fala a *Sapientia:*

> Esta discussão seria fútil se não nos conduzisse a uma apreciação da sabedoria do nosso criador e dos assombrosos conhecimentos do autor do mundo, que no início criou o mundo a partir do nada e dispôs tudo em número, medida e peso e depois, no tempo e era do homem, formulou uma ciência que nos revela maravilhas novas de cada vez que a estudamos.

Ou leia-se Kepler em *Harmonia Mundi* (1619):

Johann Kepler
1571-1630

> Agradeço-vos, Senhor, nosso criador, por me haverdes permitido contemplar a beleza da vossa criação; regozijo-me com as obras das vossas mãos. Vede, completei a tarefa a que me senti chamado; ganhei o juro do talento que me haveis confiado. Proclamei a glória da vossa obra àqueles que lerem estas demonstrações, até onde me permitiram as limitações do meu espírito.

Estes são, evidentemente, exemplos da noção platónica de que a lei matemática e a harmonia natural são aspectos do espírito-alma divino. Neste referencial, o mito euclidiano discutido no capítulo 7 surge agora como um elemento essencial e coerente.

A crença numa realidade imaterial elimina o paradoxo do problema da existência da matemática, quer na mente de Deus, quer na de outro modo mais abstracto e menos personificado. Existindo um domínio de realidade imaterial, então não é difícil aceitar a realidade dos objectos matemáticos, que passam a ser simplesmente um certo tipo de objecto imaterial.

Discutimos até agora a interacção entre a disciplina matemática e as religiões instituídas. Poderíamos interrogar-nos também sobre até que ponto funcionará a própria matemática como uma religião. Enquanto propriedades atribuíveis a certos conceitos partilhados, as «leis da matemática» assemelham-se a doutrinas de alguma igreja oficial. Um observador inteligente que observe os matemáticos a trabalhar e a falar entre si e que não estude ou aprenda matemática poderá concluir que se trata de devotos de seitas exóticas, estudiosos de esotéricas chaves do universo.

No entanto, existe um acordo digno de nota entre os matemáticos. Enquanto os teólogos apresentam discordâncias evidentes entre si nos seus pressupostos acerca de Deus, e mais ainda nas inferências que produ-

Quem manuseia o compasso? Deus? Arquimedes? John Dee? Ou o compasso manuseia-se a si próprio?

Deus manuseia o compasso

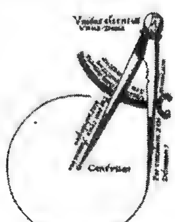
William Blake, *The Ancient of Days,* Whitworth Art Gallery, Universidade de Manchester

Arquimedes manuseia o compasso

O compasso manuseia-se a si próprio

The Mystical Compass, de Robert Fludd, *Utriusque cosmi — historia,* II (I), p. 28 (p. 407).

Fonte: Yales, Giordano Bruno



O Dr. Dee manuseia o compasso

Fonte: John Dee

zem a partir desses pressupostos, a matemática surge como uma unidade totalmente coerente e em total acordo no que diz respeito a todas as questões importantes, em especial em relação ao conceito de demonstração, um procedimento pelo qual uma proposição acerca de uma realidade não observada pode ser irrevogavelmente estabelecida e aceite por todos os aderentes. Observa-se que, se existir uma resposta conclusiva para uma determinada questão matemática, então diversos matemáticos, empregando métodos possivelmente distintos e trabalhando em séculos diferentes, chegarão às mesmas respostas.

Poderemos concluir que a matemática é uma forma de religião, talvez mesmo a verdadeira religião?

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

Dyck; F. von Hardenberg; H. Weyl; A. Seidenberg.

A abstracção e a teologia escolástica

A abstracção é a alma da matemática e, inversamente, como disse P. Dirac, «a matemática é uma ferramenta especialmente adequada ao tratamento de conceitos abstractos de qualquer espécie. O seu poder é nisso ilimitado». Porém, a abstracção é omnipresente. É quase característica da, ou equivalente à, própria inteligência. Entre os muitos frutos matemáticos da abstracção encontramos a teologia escolástica sistemática. Segundo Bertrand Russell (*History of Western Philosophy,* p. 37), a teologia escolástica sistemática procede directamente da matemática. É particularmente interessante constatar esse facto nos textos de Sa'id ibn Yusuf (882-942).

Sa'id ibn Yusuf (Saadia Gaon), filósofo, teólogo e dirigente proeminente da comunidade judia da Babilónia, nasceu no Egipto, no distrito de Faiyum. Viajou em 922 para a Babilónia, onde foi nomeado director da Academia Pumbidita. A sua obra filosófica mais importante, *Kitab al--Almanat wa-al Itiqadat (O Livro das Crenças e das Opiniões),* faz extensas referências à autoridade bíblica e talmúdica, mas recorre também à medicina, à anatomia, à matemática, à astronomia e à música. Na opinião de matemáticos contemporâneos, Saadia (empregamos agora a grafia mais comum) era um profundo conhecedor das ciências matemáticas e é este aspecto do *Kitab* que analisaremos.

Saadia é fascinante não só porque nele podemos analisar a matemática da sua época, mas também porque estão já presentes na sua teologia

sistemática os métodos, os impulsos e os raciocínios que caracterizam a matemática dos séculos XIX e XX.

Encontramos a matemática do século X quando Saadia diz (p. 93):

> Não exijo de Reuben 100 dracmas, mas exijo dele a raiz quadrada de dez mil.

Esta afirmação, provavelmente, não teria ocorrido ao homem comum de Pumbidita, não sendo também seguramente a ideia mais excitante que a matemática do século X conseguiria inventar. Mas ei-la num contexto religioso.

Encontramos uma discussão sobre o tempo que poderá sugerir-nos uma inversão do paradoxo de Aquiles e da tartaruga, não com um fim destrutivo como o de Zenão, mas com o objectivo positivo de demonstrar a criação. Se o mundo não tivesse sido criado, diz Saadia, então o tempo seria infinito. Porém, o tempo infinito não pode ser percorrido. Portanto, o mundo presente não poderia ter chegado a existir. Porém, que o presente existe é óbvio. Logo, o mundo teve um início.

No seu Tratado II, sobre a crença de que o criador de todas as coisas... é uno, Saadia inicia o seu exórdio afirmando (p. 88):

> [...] os dados de que partem as ciências são concretos, enquanto os seus objectivos são abstractos.

Um cientista moderno certamente falaria assim, pelo que nos interrogamos se este tom não terá sido imposto por um tradutor contemporâneo que tenha traduzido «grande» por «concreto» e «superior» por «abstracto». Mas penso que não, pois no exemplo que Saadia dá em seguida torna-se claro que «superior» é uma explicação que é menos específica, mais geral e, portanto, capaz de explicar grupos de fenómenos colaterais, ou seja, uma teoria abstracta. Saadia diz ainda (p. 90):

> [...] o último degrau na escada do conhecimento é o mais abstracto e o mais subtil.

Tudo isto é um prelúdio à sua insistência em que para compreendermos Deus devemos, e na verdade apenas podemos, seguir um processo de abstracção. A divindade de Saadia é, por consequência, muito abstracta e muito intelectualizada. Um dos grandes programas da matemática moderna é o programa da abstracção. Isto poderá supreender o não-matemático, para quem objectos como números, pontos, linhas e equações são já suficientemente abstractos. Porém, para o matemático, cuja profissão estuda esses objectos há 3000 anos, eles tornaram-se bastante

concretos, pelo que se tornou necessário impor outros níveis de abstracção que permitissem explicar convenientemente certas características comuns a vários desses objectos mais prosaicos. Surgiram então nas últimas centenas de anos estruturas abstractas, como os «grupos», os «espaços» e as «categorias», generalizações de ideias matemáticas relativamente simples e comuns.

No seu papel de condutor do processo de abstracção, o matemático pergunta-se continuamente «qual será a essência desta matéria?», «o que fará funcionar este processo?», «o que lhe dará a sua aparência característica?». Encontrando as respostas a estas questões, pode observar essas peças em separado, ignorando o todo.

Saadia chega ao seu conceito de Deus de forma semelhante e passa imediatamente a abstrair os milhares de anos de experiência teológica que havia herdado:

> [...] o conceito do criador [...] deverá necessariamente ser o mais subtil dos subtis, o mais recôndito dos recônditos e o mais abstracto dos abstractos.

Embora exista no corpóreo algo de divino, Deus não é corpóreo. Embora haja nos movimentos, nas contingências do espaço e do tempo, nas emoções e nas qualidades algo de divino, Deus não pode ser identificado com isso. Embora esses atributos possam estar relacionados com ele, pois ele é (p. 134) eterno, vivente, omnipotente, omnisciente, o criador, justo, económico, etc., Saadia abstraiu-o desses atributos. A divindade surge como um conjunto de relações entre objectos, alguns materiais, outros espirituais, sujeitando-se essas relações a certos requisitos axiomáticos. Quando Saadia se lança à procura de um deus através do processo de abstracção, encontra um deus muito matemático.

Tendo completado este programa de abstracção da divindade, Saadia pergunta (p. 131):

> Como será possível formarmos este conceito nas nossas mentes se nenhum dos nossos sentidos alguma vez o percebeu?

A resposta que dá é a seguinte:

> Isso consegue-se da mesma forma que as nossas mentes reconhecem a impossibilidade de que algo exista e não exista simultaneamente, muito embora tal situação nunca possa ser observada pelos sentidos.

Ou seja, reconhecemos que *A* e *não A* não podem coexistir, apesar de podermos nunca nos ter apercebido nem de *A* nem de *não A*.

A resposta dada por Saadia pode ser simplificada se sublinharmos que isso pode ser conseguido através de um processo de abstracção, da mesma maneira que um grafo abstracto não é nem um labirinto nem uma representação aritmética ou geométrica simples de uma situação labiríntica, mas sim a essência abstraída das propriedades de percorrer e de unir. Por outro lado, um labirinto é uma manifestação concreta de um grafo abstracto (c. cap. 4, «A abstracção como extracção»).

No que diz respeito à tendência actual para a abstracção extrema, o mundo matemático encontra-se dividido. Alguns dizem que, embora a abstracção seja muito útil e mesmo indispensável, em excesso poderá ser enfraquecedora. Uma teoria demasiado abstracta rapidamente se torna incompreensível, desinteressante (em si mesma) e porventura incapaz de se renovar. A motivação para a matemática tem vindo, em larga medida, do «grosseiro», e não do «refinado». Os investigadores que seguem um programa ultra-abstracto despendem frequentemente a maior parte dos seus esforços na resolução de problemas relacionados com a terminologia que foram obrigados a introduzir, e o restante dos esforços a restabelecer de forma camuflada resultados que outros haviam já antes estebelecido com mais brilhantismo, ainda que com mais modéstia. Os programas de abstracção extrema são frequentemente acompanhados por atitudes de extrema arrogância por parte dos seus promulgadores e podem ser rejeitados por razões emocionais como demasiado frios e altivos.

Encontramos as mesmas limitações na divindade que Saadia apresenta. Sendo, pela própria natureza, impossível de conceptualizar, apela ao intelecto, e não às emoções. Até mesmo o intelecto tem dificuldade em abarcá-la. Conta-se a história de um professor de Matemática cujas aulas eram sempre extremamente abstractas. Durante uma dessas aulas ficou encravado a meio da demonstração de certa proposição. Abeira-se então de um dos cantos do quadro e, muito disfarçadamente, desenha algumas figuras geométricas que lhe dão uma representação concreta sobre aquilo de que estava a falar. Esclarecida a dúvida, seguiu alegremente — *in abstracto.* A divindade de Saadia sofre do mesmo defeito. Necessita de sustento vindo de baixo. Sendo parte de uma prática religiosa, deve ser emocionalmente complementada por metáforas. O próprio Saadia parece ter-se apercebido disso, discutindo então longamente diversos antropomorfismos associados a Deus. Faz então uma afirmação a que todos os proponentes de programas ultra-abstractos deveriam prestar atenção:

> Se na nossa tarefa de explicarmos Deus apenas empregássemos expressões literalmente verdadeiras [...] nada nos restaria para afirmarmos senão a verdade da sua existência.

Saadia fala também (p. 95) de

> [...] uma demonstração da unicidade de Deus [...].

Todo o desenvolvimento dessa secção tem um pendor surpreendentemente matemático. Uma das actividades matemáticas mais comuns é a demonstração do chamados «teoremas de existência e de unicidade». Os teoremas de existência asseguram que, respeitadas certas restrições definidas *a priori,* existirá, pelo menos, uma solução para um determinado problema. Em matemática nunca se pressupõe a existência de soluções; colocam-se, na verdade, muitos problemas para os quais é possível demonstrar que não há soluções. Quando isso acontece, as restrições que foram impostas poderão ter sido demasiado estritas ou as condições poderão ter sido autocontraditórias. O matemático precisa de teoremas de existência que lhe assegurem que o problema que está a ser atacado pode de facto ser resolvido. Esse tipo de teoremas é muitas vezes difícil de demonstrar.

Se Saadia fosse um teólogo com a formação de um matemático moderno, teria certamente iniciado o seu tratado com uma demonstração da existência de Deus. Até mesmo Maimónides (1135-1204) o faz (até certo ponto). Maimónides escreve em *Mishneh Torah,* livro I, capítulo I:

> O princípio fundamental é o de que existe um primeiro ser que foi a causa de tudo o que veio a existir, pois, se supusermos que não existe, então nada mais poderia ter existido [...].

Isto soa ao ouvido matemático como uma demonstração por contradição (um estratagema muito utilizado); o facto de o matemático se sentir tentado a considerar o silogismo de Maimónides um *nonsequitur* é aqui irrelevante.

Mas, pelo que compreendi, Saadia não procede dessa forma. A existência de Deus é dada, ou seja, é postulada. A sua unicidade é então demonstrada e, posteriormente, as propriedades que o caracterizam são deduzidas através de uma combinação curiosa de abstracção e silogismos bíblicos. O método dos Gregos funde-se aqui com as tradições judaicas.

Isto leva-nos à questão dos «teoremas de unicidade». Da mesma forma que um teorema de existência prova que, sob determinadas condições, um problema possui pelo menos uma solução, um teorema de unicidade prova que, sob determinadas condições, um problema possui no máximo, uma solução. A expressão «uma e uma só solução» é ouvida com frequência em matemática. Dedica-se muito esforço à demonstração de teoremas de unicidade, pois são tão importantes como difíceis de

demonstrar. Poder-se-ia mesmo dizer que tentar demonstrá-los é um desejo primitivo dos matemáticos.

A unicidade traduz uma situação bem definida, totalmente previsível. A não-unicidade traz ambiguidade e confusão. A estética matemática adora a primeira e evita a segunda. Porém, em muitas situações a unicidade não é, num sentido estrito, possível. Mas o apelo da unicidade é tão forte que os matemáticos encontraram maneiras de eliminarem as ambiguidades através do processo de abstracção, identificando entidades que partilham propriedades comuns e criando a partir delas uma superentidade, que é então única. Isto não é simples verbalismo, pois as ambiguidades são muito melhor compreendidas por este processo aparentemente artificial de as suprimir. A motivação em direcção à unicidade deística poderá ser explicada em termos muito semelhantes.

Continuando a folhear Saadia, encontramos mais adiante a seguinte citação, como parte da demonstração de unicidade:

> Pois se ele fosse mais do que um, aplicar-se-lhe-ia a categoria de número e cairia então sob a alçada das leis que governam os corpos.

E, mais à frente:

> Afirmo que existem dois requisitos para a noção de quantidade, nenhum dos quais se aplica ao criador.

Parece que Deus não é quantificável. Porém, Deus pode ser objecto de raciocínio e de silogismos. Isto pode parecer semelhante ao facto — velho de pelo menos cento e cinquenta anos — de que a matemática pode tratar de conceitos que não estão directamente relacionados com números ou com relações espaciais.

Resumindo, encontramos no capítulo de Saadia sobre Deus o processo de abstracção, a utilização de silogismos, incluindo alguns expedientes interessantes, como a «demonstração por contradição». Encontramos também alguns conceitos de lógica que se tornaram comuns com Russell e Whitehead, como a construção da classe unitária, que contém apenas um elemento. Existe, além disso, a percepção da posição central que os teoremas de existência e de unicidade deverão ocupar numa teoria.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

Saadia Gaon, J. Friedman.

4
Questões internas

Os símbolos

Os símbolos especiais que povoam a linguagem matemática escrita formam um acréscimo colorido e variado aos símbolos usados pelas línguas naturais. Na escola primária as crianças cedo aprendem quais são os dez algarismos, 0, 1, 2, 3, ..., 9, e como hão-de dispô-los em números concatenados, com casas decimais e com potências. Aprendem também os sinais para as operações +, −, × (ou ·), ÷ (ou /) e $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$. Aprendem sinais que designam números especiais, como π (= 3,14159...), ou que devem ser interpretados de forma especial, como o sinal de grau, quando surge em 30° ou 45°. Aprendem sinais de agrupamento, como ( ), { }. Aprendem sinais de comparação, como =, > e <. Todos estes sinais têm como efeito a atribuição de uma qualidade secreta e mística a uma página de aritmética — e tanto assim é que, quando os loucos inventam a sua matemática particular, demonstram especial orgulho pela invenção do seu próprio vocabulário de símbolos excêntricos.

Estudos posteriores de matemática conduzem o aluno à álgebra, onde reaparecem as letras usuais, mas num contexto absolutamente novo e surpreendente: no papel de incógnitas e variáveis.

Com o cálculo surgem ainda outros símbolos: $\frac{d}{dx}$, $\int$, $\iint$, dx, Σ, ∞; lim, $\frac{\partial}{\partial x}$, etc. Contam-se já por várias centenas os símbolos matemá-

ticos que hoje se usam regularmente e todos os anos surgem novos símbolos. Entre os de maior interesse visual, citamos

$$a_{ijk},\ \cong,\ \triangle, \nabla,\ \square,\ \uparrow,\ \#,\ \oint,\ \otimes,\ \oplus,\ \ulcorner,\ \urcorner,\ \cap,\ \cup,\ \exists,\ \sim,\ \forall,\ \pi,\ \infty,\ \aleph$$

A ciência da computação estende-se a várias disciplinas matemáticas, mas possui o seu próprio conjunto de símbolos: $\rightarrow$, END, DECLARE, IF, WHILE, $\div$, $+$, $*$, etc.

É possível atribuir a autores específicos a criação de novos símbolos matemáticos. Atribui-se, por exemplo, a notação $n!$ para o produto iterado $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ a Christian Kramp em 1808. Deve-se a Euler (1727) a letra e para designar 2,71828... Os inventores dos algarismos 0, 1, 2, ..., 9 ou das suas formas primitivas estão, porém, já perdidos nas brumas do passado. Certos símbolos abreviam palavras: $+$ é a contracção medieval da palavra *et;* π é a inicial de «periferia»; $\int$ é um *s* medieval alongado, a inicial de *summa,* soma. Alguns são pictóricos ou ideográficos: (Δ) para triângulo, (O) para círculo. Outros ainda parecem perfeitamente arbitrários: $\div$, $\therefore$.

Não há dúvida de que vigora entre os símbolos a lei da sobrevivência do mais apto; o monumental estudo dos símbolos matemáticos realizado por Cajori é também um cemitério de símbolos extintos. O leitor encontrará aí muitos símbolos obsoletos, alguns dos quais chegam mesmo a ser cómicos, tal é a sua complexidade visual. Um facto que desencoraja a criação livre de novos símbolos matemáticos é a necessidade de criar um novo conjunto de tipos aquando da impressão do texto, processo que sempre foi dispendioso. Hoje em dia é frequente os autores restringirem-se aos símbolos de que dispõem numa máquina de escrever comum — o que traz as suas desvantagens. Favorece o abuso de certos símbolos (*, por exemplo). Certas formas de impressão por computador permitem a impressão de um número virtualmente infinito de símbolos, mas nos últimos anos a prática tem sido bastante conservadora. Mesmo sendo fácil criar um novo símbolo, o autor não consegue garantir a sua divulgação, sem a qual esse símbolo perde a sua utilidade.

Em matemática os símbolos servem essencialmente para designar com rigor e clareza e para abreviar. O proveito que daí advém é que, nas palavras de Alfred North Whitehead, «ao aliviar o cérebro de todo o esforço desnecessário, uma boa notação proporciona-lhe a liberdade para se concentrar em problemas mais profundos e, na realidade, aumenta a capacidade mental da nossa espécie». A existência do discurso matemático é, na verdade, praticamente impossível sem abreviaturas.

Consideremos, por exemplo, as abreviaturas em lógica formal. A lista que se segue foi adaptada de *Mathematical Logic,* de W. V. O. Quine:

D1. $\sim\phi$ para $\phi \downarrow \phi$
D2. $\phi \cdot \psi$ para $\sim\phi \downarrow \sim\psi$
D3. $\phi \vee \psi$ para $\sim(\phi \downarrow \psi)$
D4. $\phi \supset \psi$ para $(\sim\phi \vee \psi)$
D5. $\phi \cdot \psi \cdot \chi$ para $(\phi \cdot \psi) \cdot \chi$, etc.
D6. $\phi \vee \psi \vee \chi$ para $(\phi \vee \psi) \vee \chi$, etc.
D7. $\exists\ \alpha$ para $\sim(\alpha)\sim$

A lista completa estende-se por 48 definições semelhantes a estas. Qualquer expressão em lógica formal, como seja

$$(x)(y)\ y \in x = (\exists z)(y \in z \cdot z = x)$$

pode, em princípio, ser desenvolvida até se chegar a uma forma atómica primitiva. Isso, na prática, não pode ser feito, pois as sequências de símbolos crescem tão rapidamente que se tornam inevitáveis erros de leitura ou de processamento.

A clareza exige que o significado de cada símbolo e de cada sequência de símbolos seja perfeitamente definido e inequívoco. O símbolo 5 é entendido de uma forma que o distingue de, por exemplo, 0, 16, +, √, ou *, e deve existir um acordo universal quanto ao seu significado. Não é de forma alguma fácil responder à questão de saber se os símbolos conseguem de facto oferecer precisão, fidelidade e rigor. Foram constituídos perto do fim de século XIX vários comités com o objectivo de padronizarem os símbolos. Alcançaram um sucesso limitado. Segundo parece, a simbologia matemática tem em comum com as línguas naturais as capacidades de crescimento e de transformação orgânicos que as decisões absolutistas de um comité são incapazes de controlar.

Que fazemos com símbolos? Como agimos ou como reagimos ao vê-los? Reagimos de uma certa forma a um sinal de trânsito numa auto-estrada, de uma outra forma a um anúncio onde se faça publicidade a hambúrgueres e ainda de formas diversas a amuletos e a ícones religiosos. As nossas acções sobre os símbolos matemáticos dividem-se em duas categorias muito diferentes: efectuamos cálculos e interpretamos resultados.

Quando efectuamos cálculos, partimos de uma sequência de símbolos e, por aplicação de um conjunto de convenções, obtemos uma outra sequência de símbolos. Isso pode ser feito por uma máquina; se é feito manualmente, deverá, em princípio, poder ser verificado por uma máquina.

Interpretar um símbolo é associá-lo a algum conceito ou imagem mental, é assimilá-lo na consciência humana. As regras de cálculo devem

ser tão rigorosas quanto as operações executadas por um computador; as regras de interpretação não podem exceder em rigor a comunicação entre seres humanos.

A representação simbólica de ideias matemáticas tem sempre como consequência a alteração dessas ideias; um ganho em precisão e um prejuízo em fidelidade ou em aplicabilidade à situação inicial.

Parece, no entanto, que os símbolos rendem mais do que aquilo que neles é investido, que superam a inteligência dos seus criadores. Certos símbolos matemáticos especialmente felizes ou influentes parecem trazer em si uma força hermética, transportando as sementes da inovação ou do progresso criativo. Há, por exemplo, a notação newtoniana para as derivadas, $\dot{f}$, $\ddot{f}$, etc., assim como a notação leibnitziana Df, D^2f. A notação leibnitziana apresenta um número inteiro como indicação da ordem das várias diferenciações, o que sugere a possibilidade de uma interpretação útil de $D^\alpha f$ para assumir valores negativos ou fraccionais α. Todo o cálculo operacional procede dessa extensão, que constituiu um contributo decisivo para o desenvolvimento da álgebra abstracta nos meados do século XIX.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

F. Cajori [1928-1929]; H. Freudenthal [1968]; C. J. Jung.

A abstracção

É comum ouvir-se dizer que a matemática teve o seu início quando a percepção de três maçãs se separou das maçãs e se tornou o inteiro três. Este é um exemplo de um processo de abstracção, mas é importante explicar os vários sentidos diferentes, mas relacionados, em que este termo pode ser empregue.

A abstracção como idealização

Um carpinteiro usa uma régua de metal para traçar a lápis uma linha ao longo de uma tábua para depois a seguir como guia para o corte. A linha que o carpinteiro traça é um objecto físico: é um depósito de grafite sobre a superfície de uma tábua física. A largura e a espessura não são constantes e, ao acompanhar o bordo da régua, a ponta do lápis reage às imperfeições da superfície da tábua, resultando numa linha que é quebrada e irregular.

Constrastando com a linha recta real e concreta, existe o conceito mental da abstracção matemática de uma linha recta ideal. Na sua manifestação idealizada, desaparecem milagrosamente todos os acidentes e imperfeições da sua concretização física. Tem-se a descrição verbal idealizada e embelezada de uma linha recta: «aquilo que se situa uniformemente com os pontos em si próprio» (Euclides, definição 4), ou uma curva tal que todas as suas partes sejam a distância mais curta entre quaisquer dois dos seus pontos. Entende-se que esta linha é potencialmente extensível até ao infinito em ambas as direcções. Talvez na origem desta descrição esteja a experiência de esticar fios entre os dedos, ou a observação da propagação de raios luminosos, ou a dobragem de pedaços de papel. Mas, em qualquer caso, a abstracção termina um processo de aperfeiçoamento. Podemos eventualmente abandonar todas as nossas ideias sobre o que é «realmente» uma linha recta e simplesmente substituí-las (se estamos ao nível da axiomatização) por afirmações sobre como se comporta ou se combina uma linha recta. Como exemplos: uma linha recta é um conjunto de pontos, contendo pelo menos dois pontos. Dois pontos distintos estão contidos numa e numa só recta, etc. (v. «A corda esticada» neste capítulo.)

Para além da linha recta, chegamos também a muitas outras idealizações e perfeições: planos, quadrados, polígonos, círculos, cubos, poliedros e esferas. Em certas formalizações da geometria, algumas destas idealizações não são definidas, como, por exemplo, os pontos, as linhas e os planos. Outras poderão ser definidas em termos de conceitos mais simples, como, por exemplo, o cubo. É bem sabido que qualquer exemplo concreto de um cubo, por exemplo, um cristal cúbico, apresentará imperfeições e que qualquer propriedade desse cubo que tenha sido deduzida matematicamente se verifica no mundo real apenas em aproximação. Demonstra-se, recorrendo à geometria plana, que as bissectrizes dos três ângulos de qualquer triângulo se intersectam num único ponto; contudo, a nossa experiência com o mundo real diz-nos que, por mais cuidado que o desenhista tenha ao compor a figura, as bissectrizes serão apenas aproximadamente concorrentes; a figura comportará sempre um grau de incerteza e de indefinição evidente ao olhar, mas graciosamente ignorado pelo espírito.

As idealizações acima referidas chegaram ao mundo matemático vindas do mundo da experiência espacial. Aristóteles descreveu este processo ao afirmar (*Metafísica,* 1060a, 28– 1061b, 31) que o matemático elimina tudo o que é sensorial, como o peso, a dureza e a temperatura, e nada deixa senão a quantidade e a continuidade espacial. Na definição de modelos matemáticos contemporâneos distinguem-se variantes actuais do processo aristotélico. Um exemplo é a seguinte citação de um conhe-

cido livro sobre equações diferenciais (S. L. Ross, Blaisdell, Nova Iorque, 1964, pp. 525-526):

O processo de abstracção

Consideramos agora algumas hipóteses sobre a corda, as suas vibrações e o meio em que se insere. Começamos por supor que a corda é perfeitamente elástica, que a sua densidade linear ρ é constante e que está em cada instante sob uma tensão *T*. No que diz respeito às vibrações, supomos que o movimento está limitado ao plano *xy* e que cada ponto sobre a corda se desloca sobre uma linha recta perpendicular ao eixo *xs* enquanto a corda vibra. Supomos ainda que o deslocamento *y* em cada ponto da corda é desprezável em comparação com o comprimento *L* da corda e também que o ângulo entre a corda e o eixo *xs* é suficientemente pequeno em cada ponto. Supomos, finalmente, que não actuam sobre a corda quaisquer forças exteriores, como, por exemplo, forças de amortecimento.

Muito embora estas hipóteses não sejam de facto válidas em nenhuma situação física, são-no, ainda assim, aproximadamente satisfeitas em muitos casos. Admitem-se estas hipóteses com o intuito de simplificar o problema matemático que resulta desse modelo. Uma vez consideradas estas hipóteses, o problema consistirá então em encontrar o deslocamento *y* como função de *x* e de *t*.

A idealização matemática

Nestas condições, pode mostrar-se que o deslocamento *y* satisfaz a seguinte *equação diferencial parcial:*

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (14.20)$$

em que $\alpha^2 = T/\rho$. Esta equação designa-se por equação de onda unidimensional.

Considerando fixos os extremos da corda em $x = 0$ e $x = L$ em cada instante *t*, o deslocamento *y* terá de satisfazer as *condições de fronteira:*

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 \qquad 0 \le t < \infty \\ y(L, t) &= 0 \qquad 0 \le t < \infty \end{aligned} \qquad (14.21)$$

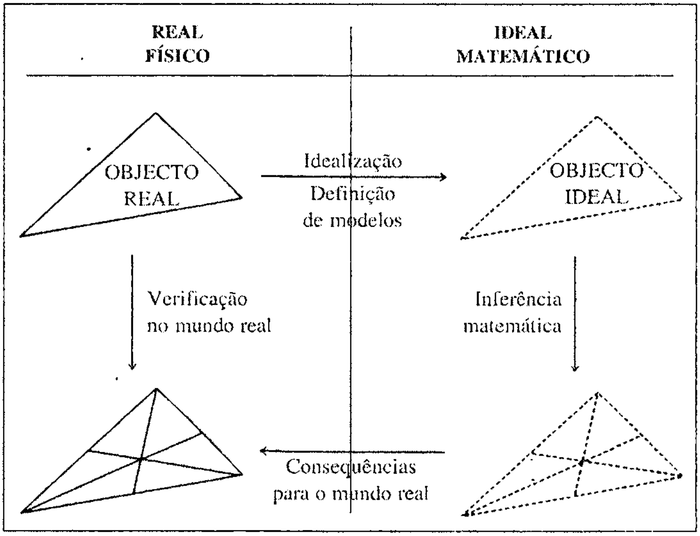
No instante $t = 0$ larga-se a corda da sua posição inicial descrita por $f(x)$, $0 \le x \le L$ com a velocidade inicial de $g(x)$, $0 \le x \le L$. Por consequência, o deslocamento *y* deverá satisfazer também as *condições iniciais:*

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= f(x) \qquad 0 \le x \le L \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= g(x) \qquad 0 \le x \le L \end{aligned} \qquad (14.22)$$

Eis então o nosso problema: o que se pretende é achar a função y de x e t que satisfaça a equação diferencial parcial (14.20), as condições de fronteira (14.21) e as condições iniciais (14.22).

Este sistema de equações é uma idealização de um conjunto de condições físicas extremamente complexo.

Ilustra-se no diagrama que se segue a relação entre o que é real e o que é ideal (embora, em rigor, seja impossível representar os objectos ideais que figuram no lado direito do diagrama).



O processo de abstracção *A idealização matemática*

A noção platónica de um mundo de objectos ideais está intimamente relacionada com o processo de idealização em matemática. Aquilo a que se chama o mundo real da experiência, diz Platão, não é afinal nada real. É como se vivêssemos no interior de uma caverna, observando as sombras projectadas pelo mundo exterior e tomando-as pela realidade (*República,* VII, 514-517). Os objectos matemáticos são todos abstractos e é no mundo platónico que existem o verdadeiro círculo e o verdadeiro quadrado. É aí que existem as verdadeiras formas, as verdadeiras perfeições, e é esse o mundo que se diz ser perfeitamente descrito pela linguagem matemática. «Não há dúvida», escreveu Kepler em 1611, «de que o verdadeiro modelo destas figuras existe na mente de Deus criador e participa na sua eternidade.»

A abstracção como extracção

Estão quatro pássaros a comer migalhas no meu jardim. Há quatro laranjas sobre a mesa na minha cozinha. O próprio uso da palavra *quatro* revela a existência de um processo de abstracção que permitiu a separação de uma característica comum aos pássaros e às laranjas. Há uma laranja por cada pássaro. Há um pássaro por cada laranja, assim se estabelecendo uma correspondência biunívoca entre pássaros e laranjas. Aqui, por um lado, temos objectos. Ali, por outro, temos números que aparentemente existem independentemente de pássaros ou de laranjas.

«A aritmética», escreveu Platão (*República,* VII, 525), «exerce um poderosíssimo efeito de elevação, levando a alma a raciocinar sobre o número abstracto e revoltando-se contra a consideração de objectos tangíveis ou visíveis nesse raciocínio.»

A matemática de hoje ignora o interessante problema psico-histórico de saber como surgem as abstracções e dedica-se antes a utilizar a teoria dos conjuntos para formular descrições da origem da abstracção. A noção abstracta de quatro é, segundo Russell e Whitehead (*Principia Mathematica,* vol. I), o conjunto de todos os conjuntos que possam ser postos em correspondência biunívoca com os quatro pássaros que pousaram no meu relvado.

Será elucidativo ilustrar o processo da abstracção matemática recorrendo a um outro exemplo que é ao mesmo tempo simples e moderno. Chega-nos da teoria abstracta dos grafos. Observemos as duas figuras que se seguem e tentemos encontrar aquilo que têm em comum. À primeira vista, poderá parecer que nenhuma tem nada em comum com a outra. O que se vê na primeira figura parece uma sucessão de caixas, umas dentro das outras, enquanto a segunda parece a representação simplificada de um colar de pérolas. Não temos, no entanto, qualquer dúvida em afirmar que a segunda figura é muito mais simples do que a primeira. Há, porém, um aspecto sob o qual estas figuras são rigorosamente idênticas. Pensemos na primeira como a planta de um labirinto. Partindo do exte-

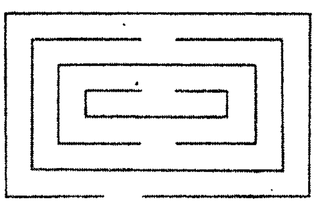


Figura 1

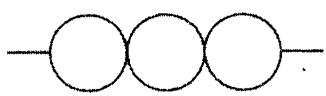


Figura 2

rior, procuramos encontrar o caminho que nos conduza até à câmara central. Percorremos os corredores um pouco ao acaso, procurando uma porta que nos deixe mais próximo do centro e esperando não regressar a um ponto que tenhamos já visitado. Após uma exploração exaustiva do labirinto, seremos capazes de o descrever por inteiro. Podemos até fazê-lo verbalmente. Admitamos que o labirinto está identificado da forma indicada na terceira figura. Uma descrição poderá ser então a que se segue:

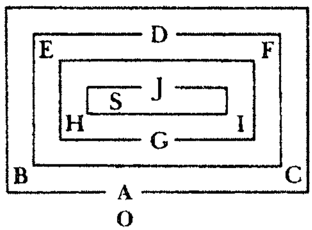
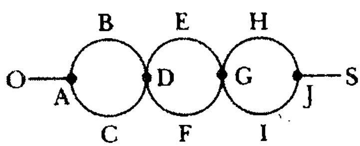


Figura 3

Partindo do ponto exterior O, dirigimo-nos à porta situada em A. Essa porta conduz a dois corredores, B e C, seguindo ambos até à porta D. A porta D conduz a dois corredores, E e F, seguindo ambos até à porta G. A porta G conduz a dois corredores, H e I, seguindo ambos até à porta J. A porta J conduz à sala central S.

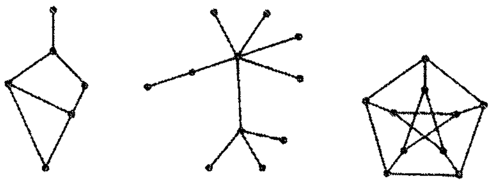
Admitamos agora que marcamos assim a figura 2:



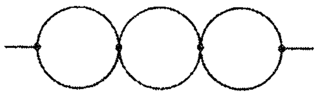
Verificamos facilmente que a descrição verbal que se aplica ao primeiro labirinto se aplica igualmente à figura acima quando esta é percorrida da esquerda para a direita. As duas figuras são, pois, idênticas sob esse aspecto, sendo a segunda conceptualmente muito mais simples de tratar. Como é evidente, a segunda figura não contém tanta informação acerca do labirinto quanta a que encontramos na primeira, a qual poderia até mesmo ser uma planta minuciosa. Todavia, se o nosso interesse recai sobre o problema de como atravessar o labirinto, então o segundo diagrama é apropriado.

Um objecto semelhante ao apresentado na figura 2, do qual nos interessam apenas os caminhos possíveis, é designado por grafo.

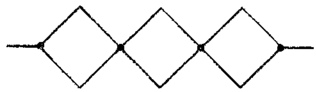
Apresentamos de seguida outros grafos:



Notemos que certas particularidades da configuração geométrica da figura 2 são contingentes. É, pois, indiferente que desenhemos

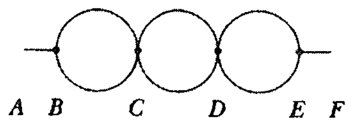


ou



No que toca aos caminhos, podemos escolher aquele que nos pareça visualmente mais simples.

O processo de abstracção pode ser prosseguido até nos afastarmos por completo da geometria. Assinalei nos grafos acima com pequenas marcas os pontos onde se apresentam alternativas. Admitamos que esses pontos de decisão são designados por letras, como se segue:



As linhas que unem os pontos de decisão tornaram-se meramente simbólicas.

Para os nossos propósitos seria indiferente escrever «AB, 1, BC, 2, CD, 2, DE, 2, EF, 1», como indicação de que existe um corredor entre A e B, dois corredores diferentes entre B e C, etc., e de que não existem quaisquer outras ligações. É até possível dar a esta informação a forma de tabela:

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	1	0	2	0	0	0
C	0	2	0	2	0	0
D	0	0	2	0	2	0
E	0	0	0	2	0	1
F	0	0	0	0	1	0

A uma tabela assim definida chama-se «matriz de incidência» de Poincaré. Chegámos a uma descrição completamente aritmética para o labirinto da figura 2.

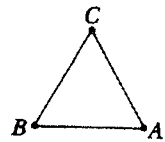
Se o que nos interessa é a construção de uma teoria de grafos que descreva as propriedades de travessias e nada mais, então não necessitamos senão da informação que consta dessa matriz.

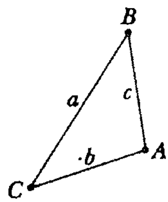
Munidos de tal matéria-prima, passamos à inferência de conclusões. Embora a inspiração inicial possa ter sido geométrica, libertámo-nos de toda a herança geométrica e a teoria abstracta dos grafos que daí resultou é puramente combinatória. O grafo abstracto nada mais é do que um conjunto de objectos (os nós) juntamente com um conjunto de relações entre esses nós (os arcos) que devem satisfazer certas condições axiomáticas. É apenas disto que necessitamos.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. Weinberg.

A generalização





«Man muss immer generalisieren» (devemos sempre generalizar), escreveu Jacobi na década de 1840. Os termos *generalização* e *abstracção* são frequentemente utilizados como sinónimos, mas existem certos significados do primeiro que merecem uma explicação. Admitamos que num passado longínquo, o matemático Alfa tenha enunciado: «Se ABC é um triângulo equilátero, então o ângulo em A é idêntico ao ângulo em B.» Admitamos também que algum tempo mais tarde o matemático Beta comente com os seus botões que, embora a conclusão do matemático Alfa seja perfeitamente verdadeira, não é necessário que ABC seja equilátero para que aquela se verifique: bastará que o lado BC seja igual ao lado AC. Beta poderia então enunciar: «Num triângulo isósceles, os ângulos da base são idênticos.» A segunda afirmação generaliza a primeira. As hipóteses da primeira implicam as da segunda, mas o inverso não se verifica, ao passo que a conclusão é idêntica. Sente-se que, de alguma forma, a segunda versão tem um valor maior do que a primeira. A segunda versão melhora, reforça e generaliza a primeira.

Ocorrem-nos facilmente outros exemplos:

- Proposição: qualquer número que termine em 0 é divisível por 2;
- Generalização: qualquer número que termine em 0, 2, 4, 6 ou 8 é divisível por 2.

Nem sempre a generalização conserva a mesma conclusão:

- Proposição: tem-se $c^2 = a^2 + b^2$ em qualquer triângulo rectângulo;
- Generalização: tem-se $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ em qualquer triângulo.

A conclusão diferente a que chegámos corresponde a uma hipótese mais geral, mas a primeira resulta da segunda quando se fixa $C = 90°$, valor para o qual se tem $C = 0$.

A generalização pode também resultar de uma alteração radical nas características do meio:

- Proposição: sendo x_1, x_2, x_3, as arestas de uma caixa tridimensional, então a sua diagonal d é dada por

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

- Generalização: sendo x_2, ..., x_n, as arestas de uma caixa n-dimensional, então a sua diagonal d é dada por

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Animados pela «coincidência» de termos

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

a duas dimensões e

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

a três dimensões, tentamos uma generalização, procurando um meio matemático através do qual possamos afirmar que

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Isso verifica-se com a teoria dos espaços euclidianos n-dimensionais.

É importante termos sempre em atenção que, embora o geral inclua alguns aspectos do particular, não pode incluí-los todos e que a própria

especificidade confere privilégios suplementares. É desta forma que a teoria dos triângulos equiláteros não está contida na teoria dos triângulos isósceles. E os números que terminam em 0 são divisíveis tanto por 2 como por 5, ao passo que aqueles que terminem em 0, 2, 4, 6 ou 8 já não o são. Encontramos na teoria geral das funções contínuas apenas uma parte diminuta dos factos interessantes acerca da função contínua $y = e^x$. Assistimos, pois, ao passarmos do particular para o geral, a dramáticas redefinições do que é importante e do que deve ser salientado.

Uma das vantagens da generalização é a consolidação do conhecimento. Permite-nos agrupar elegantemente num só pacote vários factos dispersos que estão intimamente relacionados entre si:

- Proposições: se o último algarismo de um número for 0, então é divisível por 2; se o último algarismo de um número for 2, então é divisível por 2;
- Consolidação: se o último algarismo de um número for par, então é divisível por 2;
- Proposições: os polinómios de Legendre satisfazem uma relação de recorrência a três termos; os polinómios de Tchebycheff satisfazem uma relação de recorrência a três termos;
- Consolidação: qualquer conjunto de polinómios ortogonais satisfaz uma relação de recorrência a três termos.

Por ampliar o palco sobre o qual se desenrola a acção matemática, a generalização resulta num aumento de conhecimento. A consolidação pode revelar-se impossível se o estreito palco original possuir particularidades que lhe são essenciais.

A formalização

A formalização é o processo pelo qual se prepara a matemática para o processamento mecânico. Um programa de computador é um exemplo de um texto formalizado. Para se programar um computador a fim de calcular o saldo de uma conta no banco é indispensável conhecer o seu vocabulário. É necessário conhecer as regras gramaticais que regem o funcionamento do sistema operativo do computador. Os textos matemáticos que geralmente encontramos nunca estão completamente formalizados. São escritos em inglês ou em qualquer outra língua natural; por se destinarem a ser lidos por seres humanos. Todos acreditam, porém, que é possível formalizar texto matemático. Na verdade, acredi-

ta-se mesmo que qualquer texto matemático *pode* ser formalizado recorrendo a uma única linguagem: a linguagem da teoria formal de conjuntos.

Abraham A. Fraenkel
1891-1965

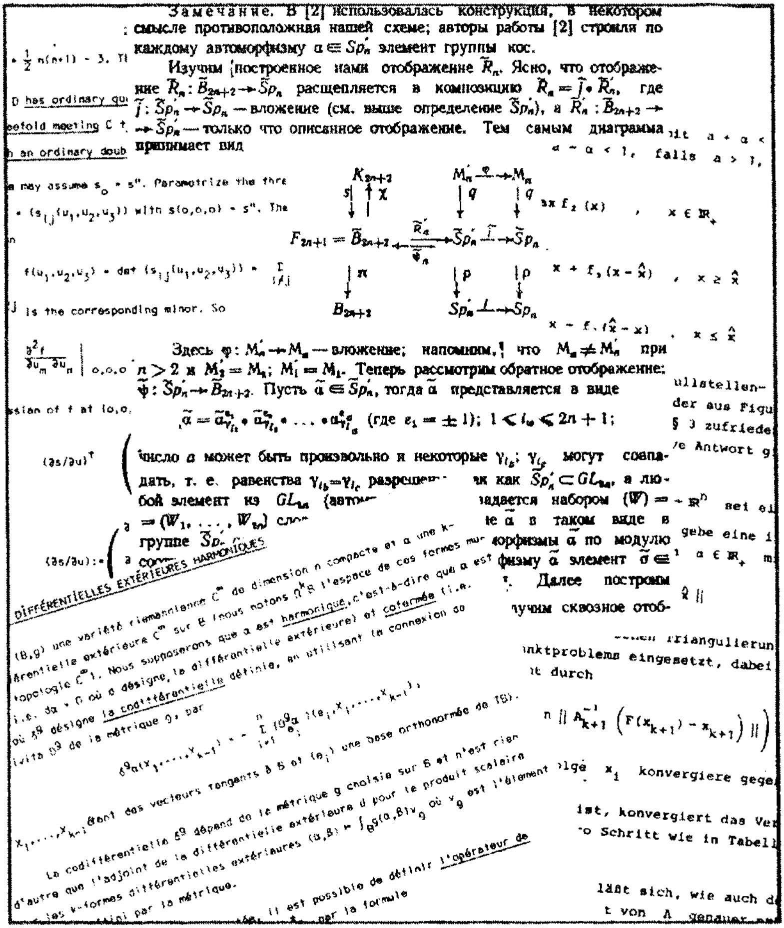
Qualquer livro didáctico sobre lógica explica as regras de sintaxe a que obedece essa linguagem. Apresentamos na imagem da p. 138 os axiomas de Zermelo-Fraenkel-Skolem, a axiomática mais divulgada para a teoria dos conjuntos. Os axiomas estão escritos em linguagem formal; por baixo de cada expressão formal está a respectiva tradução para português.

Quatro dos símbolos utilizados dizem respeito especificamente à teoria de conjuntos: o símbolo para «união», $\cup$; o símbolo para «está contido em», $\subseteq$; o símbolo para «pertence a», $\in$; o símbolo para «conjunto vazio», $\varnothing$. Todos os outros são símbolos de lógica e utilizar-se-iam em qualquer formalização de uma teoria matemática. Poderíamos, por exemplo, definir em linguagem formal os axiomas para a geometria plana. Em vez de $\cup$, $\subseteq$, $\in$, $\varnothing$, introduziríamos símbolos para representar conceitos como «ponto», «recta», «intersecta» e «paralelo a» e escreveríamos fórmulas que traduzissem nessa linguagem formal os enunciados vulgares desses axiomas em português.

Giuseppe Peano
1858-1932

A motivação para o uso de uma linguagem formal sofreu já uma evolução considerável. As linguagens formais foram de início apresentadas por Peano e Frege nos finais do século XIX com o objectivo de tornar mais rigorosa a demonstração matemática — ou seja, de reforçar a segurança nas conclusões dos raciocínios matemáticos. Porém, este objectivo não foi alcançado, pelo menos considerando que este argumento se referia a um leitor humano. A grande tentativa para de facto se atingir uma matemática formalizada foi o *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead — que é considerado o exemplo por excelência de uma obra-prima ilegível.

Enquanto os leitores humanos têm uma aversão insuperável às linguagens formais, os computadores dão-se muito bem com elas. Pouco depois da Segunda Guerra Mundial, com o advento do computador electrónico, as linguagens formais deram origem a uma indústria em crescimento. Sob o designação de *software*, os textos escritos em linguagens formais são hoje um dos artefactos típicos da nossa cultura.



O discurso matemático é executado numa mistura de linguagen formal e natural

Um texto formalizado é uma sequência de símbolos. Quando manipulada, quer por um matemático, quer por uma máquina, dá origem a uma nova sequência de símbolos. Essas manipulações simbólicas podem, elas próprias, ser objecto de uma teoria matemática. Quando se considera que essa manipulação é efectuada por uma máquina, a teoria é conhecida pelos cientistas da computação como «teoria dos autómatos» e pelos lógicos como «teoria da recursão». Quando se considera que a manipulação é efectuada por um matemático, essa teoria é conhecida por «teoria da demonstração».

∀ PARA TODOS	↔ SE E SÓ SE	∈ PERTENCE A (É ELEMENTO DE)
∃ EXISTE	∨ OU	= É IGUAL A
∃! EXISTE UM ÚNICO	& E	≠ É DIFERENTE DE
∪ UNIÃO	~ NÃO	Φ O CONJUNTO VAZIO
→ IMPLICA	⊆ É SUBCONJUNTO DE	

1. AXIOMA DA EXTENSIONALIDADE

$\forall x.\ y(\forall z(z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$

Dois conjuntos são idênticos se e só se contiverem os mesmos elementos.

2. AXIOMA DO CONJUNTO VAZIO

$\exists x\ \forall y(\sim y \in x).$

Existe um conjunto ao qual não pertence qualquer elemento (o conjunto vazio).

3. AXIOMA DOS PARES NÃO ORDENADOS

$\forall x, y\ \exists z\ \forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$

Se *x* e *y* são conjuntos, então o par (não ordenado) $\{x,y\}$ é um conjunto.

4. AXIOMA DO CONJUNTO SOMA OU UNIÃO

$\forall x\ \exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists t(z \& t \in x))$

Se *x* é um conjunto de conjuntos, então a união de todos os seus elementos é um conjunto. (Por exemplo, se $x = \left\{ \begin{matrix} \{a,b,c\} \\ \{a,c,d,e\} \end{matrix} \right\}$, então a união dos (dois) elementos de *x* é o conjunto $\{a,b,c,d,e\}$.)

5. AXIOMA DO INFINITO

$\exists x\ (\phi \in x \& \forall y(y \in x \rightarrow yU\{y\} \in x)$

Existe um conjunto *x* que contém o conjunto vazio e que é tal que, se *y* pertencer a *x*, então a união de *y* com {y} também figura em *x*. A diferença entre o elemento *y* e o conjunto singular {y} é elementar. Este axioma garante a existência de conjuntos infinitos.

6_n. AXIOMA DA SUBSTITUIÇÃO

$\forall t_1 ... ,t_k\ (\forall x\ \exists!\ y\ A_n(x,y,t_1,...t_k) \rightarrow \forall u\ \exists v\ B(u,v))$ em que $B(u,v) \equiv \forall r\ (r \in v \leftrightarrow \exists s(s \in u \& A_n(s,r,t_1,...t_k)))$

Não é fácil exprimir este axioma em português. Chama-se 6_n, e não 6, porque, na verdade, é toda uma família de axiomas. Partimos do princípio de que foram numeradas todas as fórmulas no nosso sistema e designamos por A_n a *n*-ésima fórmula. O axioma da substituição diz-nos então que, se para $t_1,...,t_k$ fixo, $A_n(x.y:t_i)$ define *y* univocamente como função de *x*, digamos $y = \varphi(x)$, então para cada *u* o contradomínio de φ sobre *u* é um conjunto. Isto significa, aproximadamente, que qualquer propriedade («razoável») que possa ser expressa na linguagem formal da teoria pode ser utilizada para definir um conjunto (o conjunto de elementos que satisfazem essa propriedade).

7. AXIOMA DO CONJUNTO POTÊNCIA

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

Este axioma afirma que para cada *x* existe o conjunto *y* de todos os subconjuntos de *x*. Embora *y* seja assim definido por uma propriedade, não é abrangido pelo axioma da substituição porque não é dado como contradomínio de qualquer função. Na verdade, a cardinalidade de *y* será superior à de *x*, pelo que este axioma nos permite construir cardinais de ordem superior.

8. AXIOMA DA ESCOLHA

Se $\alpha \rightarrow A_\alpha \neq \phi$ é uma função definida para todo o $\alpha \in x$, então existe uma outra função $f(\alpha)$ para $\alpha \in x$ e $f(\alpha) \in A\alpha$

Este é o bem conhecido axioma da escolha, que nos permite «escolhas» infinitas, mesmo não possuindo qualquer propriedade que defina uma função de escolha e possibilite a aplicação de 6_n.

9. AXIOMA DA REGULARIDADE

$\forall x\ \exists y(x = \phi \vee)(y \in x \& \forall z(z \in x \rightarrow \sim z \in y)))$

Este axioma proíbe explicitamente $x \in x$, por exemplo.

Enumeram-se aqui os axiomas de Zermelo-Fraenkel-Skolem para a teoria de conjuntos. Para exprimir estes teoremas é necessário utilizar os símbolos da teoria de conjuntos, para os quais se apresenta um glossário acima. Esta axiomática foi proposta por Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel e Thokolf Skolem

Se se admitir que o trabalho dos matemáticos é feito sobre uma linguagem formal, conclui-se que é possível definir uma teoria matemática sobre a própria matemática. Para levar a cabo uma análise lógica da matemática é necessário pressupor que a matemática se exprime numa linguagem formal. Partindo desta hipótese, os lógicos definiram grandiosas teorias acerca das propriedades dos sistemas matemáticos. Porém, o trabalho matemático efectivo, incluindo o dos lógicos, exprime-se ainda em linguagens naturais acrescidas de certas notações matemáticas especiais. As questões sobre a relação entre as descobertas da lógica matemática e a prática efectiva dos matemáticos vivos são difíceis, por não pertencerem ao domínio da matemática, mas sim ao da filosofia.

Uma página normal de exposição matemática poderá ocasionalmente incluir apenas símbolos matemáticos. O observador desatento poderá achar pouca a diferença entre uma tal página de texto matemático e um texto escrito em linguagem formal. Há, contudo, uma diferença crucial que é impossível não notar assim que se começa a ler. Num texto matemático normal podem omitir-se quaisquer passos puramente mecânicos. Basta indicar o ponto de partida e o resultado final. Os passos explicitados são exactamente aqueles que não são puramente mecânicos — que aplicam alguma ideia construtiva ou implicam a introdução de algum elemento inovador nos cálculos. Para fazer uma leitura completa de um texto matemático há que suprir essa nova ideia que justifica os passos que de facto foram escritos.

Quase poderia dizer-se que as regras para a escrita matemática para consumo humano são o oposto das regras para a escrita matemática a ser consumida por máquinas (isto é, textos formalizados). Para a máquina nada poderá ficar por indicar, nada deverá ser deixado «à imaginação». Para o leitor humano nada deverá ser incluído que seja tão óbvio e tão mecânico que desvie a atenção daquilo que se pretende transmitir.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

P. Cohen e R. Hersh; K. Hrbacek e T. Jech; G. Takeuti e W. M. Zaring.

Objectos e estruturas matemáticas — existência

O discurso matemático informal, sendo parte do discurso natural, é composto por substantivos, verbos, adjectivos, etc. Os substantivos de-

signam objectos matemáticos: por exemplo, o número 3, o número $e = 2.178...$, o conjunto dos números primos, a matriz $\binom{1\ 0\ 0}{0\ 1\ 2}$, a função zeta de Riemann $\zeta\ (z)$. As estruturas matemáticas, como, por exemplo, o sistema dos números reais ou o grupo cíclico de ordem 12, são substantivos um tanto mais complexos e compõem-se de objectos matemáticos ligados entre si por certas relações ou leis de combinação. Os símbolos de combinação ou de relação, como «igual», «maior do que», a adição e a diferenciação desempenham um papel semelhante ao dos verbos. Os adjectivos matemáticos restringem ou qualificam, como a palavra *cíclico,* que encontramos na expressão *grupo cíclico.*

Para não forçarmos esta analogia com a gramática, regressemos aos objectos e às estruturas matemáticas. Segundo o uso corrente, uma estrutura matemática é um conjunto de objectos S que pode ser considerado o portador da estrutura, um conjunto de operações ou relações definidas no portador e um conjunto de elementos especiais no portador, como os números 0, 1, ou outros. Estes ingredientes elementares dizem-se constituírem a «assinatura» da estrutura, apresentada normalmente sob a forma de um n-tuplo. Por exemplo, $<R, +, \cdot, 0, 1>$, denota o conjunto dos números reais combinados pela operações de adição e de multiplicação e com dois elementos especiais, 0 e 1. Quando se impõe à assinatura um conjunto de axiomas que estabelece condições sobre os seus elementos, tem-se uma estrutura matemática. Um semigrupo é pois $<S, \circ>$, em que $\circ$ representa uma operação binária associativa. Ampliando um pouco esta descrição, um semigrupo é um conjunto de objectos S do qual quaisquer dois elementos podem combinar-se para formarem um terceiro, de forma que, se $a, b \in S$, então $a \circ b$ está definido e é um elemento de S e, para além disso, tem-se que para quaisquer três elementos $a, b, c \in S$, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. De modo semelhante, um monóide é uma assinatura $<S, \circ, 1>$, em que $\circ$ representa uma operação binária associativa e 1 é um elemento neutro à direita e à esquerda para $\circ$*.

Não é de todo claro o que distingue um objecto matemático de uma estrutura matemática. Essa separação parece variar consoante a época

---

* Qualquer linguagem redunda em maneirismos e gíria quando levada ao extremo. Hans Freudenthal parodia este processo ao descrever a «teoria matemática das reuniões», em que começa por definir um «modelo» para uma reunião:

> Uma reunião é um conjunto ordenado $<M, P, c, s, C_1, C_2, b, i_1, i_2, S\ i_3>$ que consiste em:
>
> - Uma região limitada do espaço euclidiano M;

histórica e a sua utilidade. Se uma estrutura matemática é frequentemente utilizada durante um longo período de tempo, surgirá todo um corpo de experiência e de intuição sobre essa estrutura que poderá vir a ser considerada um objecto matemático. Assim, o conjunto R dos números reais, uma estrutura, pode ser visto como um objecto quando se toma o produto $R \times R$ para definir pares de números reais.

Os objectos, as estruturas e os problemas matemáticos comuns estão integrados em tabelas, programas, artigos e livros. As calculadoras mais avançadas contêm em si concretizações físicas de subconjuntos em base decimal dos números racionais, para além de inúmeras funções especiais. Em certos livros figuram listas de funções especiais, as suas principais propriedades e, o que é da maior importância para a investigação contemporânea, listas de espaços funcionais especiais e das propriedades de que gozam.

É importante entendermos que, ao recuarmos no tempo, aquilo que hoje é considerado um objecto matemático simples, como um círculo, um triângulo equilátero ou um poliedro regular, poderá outrora ter transportado o impacto psicológico de toda uma estrutura e ter até exercido influência sobre a metodologia científica (por exemplo, na astronomia). Um só número, digamos, 3, era tido como uma estrutura, com as implicações místicas que daí resultavam. Isolado, um objecto matemático perde o seu significado. Esse significado resulta de uma estrutura e desempenha o seu papel apenas inserido numa estrutura.

A expressão *objecto matemático* implica que, em certo sentido, o objecto em questão existe. Poder-se-ia julgar que a existência está bem definida, mas, na realidade, esta noção levanta várias dificuldades lógicas e psicológicas. O conceito de número inteiro pequeno pode surgir devido a um mecanismo de abstracção. Mas que dizer do número 68 405 399 900 001 453 072? Sendo extremamente improvável que alguém alguma vez tenha visto ou trabalhado com uma colecção com

---

- Um conjunto finito P, o dos participantes;
- Dois elementos c e s de P, o presidente da mesa e o secretário;
- Um conjunto finito C_1, as cadeiras;
- Um conjunto finito C_2, as chávenas de café;
- Um elemento b, a campainha;
- Uma injecção i_1 de P em C_1;
- Uma aplicação i_2 de C_2 em P;
- Um conjunto ordenado S, os discursos;
- Uma aplicação i_3 de S em P, ficando c a pertencer à imagem de i_3.

Quando i_3 é sobrejectiva, é comum dizer-se que todos discursaram.

essa quantidade de elementos e tenha sentido assim o gosto numérico que lhe é único, torna-se evidente que a existência deste grande número enquanto objecto matemático deve firmar-se sobre outras considerações. O que fizemos de facto foi escrevê-lo. Querendo, podemos manipulá-lo; podemos facilmente calcular o seu dobro. Podemos responder a certas perguntas sobre ele: será par ou ímpar? Maior ou menor do que 237 098? E, assim, apesar de não sermos directamente sensíveis à multiplicidade do número, afirmamos com confiança a sua existência num outro sentido.

Trabalhando com matemática finitista e recorrendo apenas a alguns símbolos, é possível formular definições que dão origem a inteiros de grandezas tão colossais que o espírito fica atónito só com a ideia da sua expansão decimal.

Um dos exemplos mais felizes desse tipo de construções é-nos dado pelo matemático polaco Hugo Steinhaus e pelo matemático canadiano Leo Moser. Seguem-se as sóbrias definições e notações de Steinhaus.

Seja $\triangle(a) = a^a$, por exemplo, $\triangle(2) = 2^2 = 4$; seja $\boxed{b} = b$ com $b \triangle$ em seu redor, por exemplo, $\boxed{2} = \triangle(\triangle(2)) = \triangle(4) = 4^4 = 256$; seja $\bigcirc(c) = c$ com $c\,\square$ em seu redor. Então

define-se um *mega* como $= \bigcirc(2) = \boxed{\boxed{2}} = \boxed{256} = 256$ com 256 triângulos em seu redor

$= 256^{256}$ com 255 triângulos à sua volta

$= (256^{256})^{256^{256}}$ com 254 triângulos à sua volta,

$=$ etc.

Não satisfeito com isto, Moser prosseguiu a série com hexágonos, heptágonos, e assim sucessivamente; define-se um n-ágono em redor do número d é definido como o número d rodeado por d $(n-1)$-ágonos. Define-se um *moser* como o número 2 dentro de um mega-ágono.

A existência do *moser* não apresenta problemas existenciais à matemática convencional; contudo, que poderemos afirmar acerca desse número a não ser que se trata de uma gigantesca potência de 2?

A existência de objectos matemáticos mais complexos pode igualmente ser experimentada em termos das interacções com os objectos. O conjunto N dos inteiros positivos 1, 2, 3, 4, ... é o conjunto infinito elementar em matemática. O número gigantesco que construímos acima é apenas um dos seus elementos. Não é possível ter uma experiência completa de N por meio da sensação de multiplicidade. Porém, um matemático trabalha com esse conjunto, manipula-o constantemente e sabe responder a perguntas acerca dele; por exemplo, será que cada

número de N é sempre par ou ímpar, ou haverá um número x de N tal que $x = x + 1$? Algumas pessoas sentem dificuldades psicológicas com este conjunto e chegam mesmo a considerar disparatado afirmar a sua existência. Ao tomarem essa posição, distinguem-se de todos os outros matemáticos, podendo essa rejeição afastá-los da maior parte da matemática.

Nós vamos ainda mais longe. Uma vez aceite a ideia de um infinito simples, admite-se facilmente a ideia de uma sucessão infinita de algarismos de 0 a 9. Por exemplo, a sucessão 1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3, ... em que se repetem periodicamente os algarismos 1, 2 e 3. Ou um caso ainda mais complicado: a expansão decimal de π: 3,14159... Imagine-se agora o conjunto de todas as sucessões que é possível construir com os dígitos 0, ..., 9. Este é, essencialmente, o sistema dos números reais, e é sobre esse palco que se desenrola a acção na disciplina da análise matemática, ou seja, do cálculo e das suas generalizações. Existem nesse sistema tantos elementos que, como Cantor demonstrou, é impossível dispô-los numa lista, mesmo numa lista infinita. Este sistema está distante da experiência do comum dos leigos, mas o matemático profissional acumula sobre ele uma sólida intuição. Os números reais formam o sustentáculo da análise e tanto o estudante como o professor típicos de cálculo aceitam prontamente a existência deste conjunto e centram a sua atenção sobre os aspectos de manipulação formal.

Vamos mais longe ainda. Construímos aquilo a que se chama o ultrafiltro de Fréchet, um conceito muito útil em diversas áreas da topologia de conjuntos pontuais e que é essencial para a definição do sistema dos números hiper-reais, que, por sua vez, está relacionado com a análise não standard (v. capítulo 5.) Consideremos para tanto todos os subconjuntos infinitos do conjunto dos números inteiros: (1, 2, 3, ...), ou (2, 4, 6, 8, 10, ...), ou (1, 1000, 1003, 1004, 20 678, ...), por exemplo.

Neste último subconjunto já nem tivemos presente qualquer regra ou procedimento para gerar os seus elementos. O que pretendemos agora é restringir os subconjuntos considerados.

Seja X um conjunto e F uma família de subconjuntos não vazios de X tal que, (1) se dois conjuntos A e B pertencerem à família F, então a sua intersecção também está em F e, (2) se A pertencer a F e A for um subconjunto de um certo B que é subconjunto de X, então B pertence a F. A uma família que respeite essas condições dá-se o nome de filtro em X. Para dar um exemplo concreto, seja X o conjunto de todos os inteiros positivos 1, 2, 3, ... Designemos por F o conjunto de todos os subconjuntos «co-finitos» de X — os subconjuntos que omitem, no máximo, um número finito de elementos em X. Por exemplo, o conjunto (2, 3, ...) está

em *F*, uma vez que apenas se omite 1. O conjunto (10, 11, ...) está em *F*, uma vez que se omite 1, 2, ..., 9. Pelo contrário, o conjunto dos números ímpares (1, 3, 5, ...) não está em *F*, por não conter o conjunto infinito dos números pares. Não é difícil mostrar que o conjunto de todos os subconjuntos co-finitos é um filtro. Este filtro designa-se frequentemente por «filtro de Fréchet».

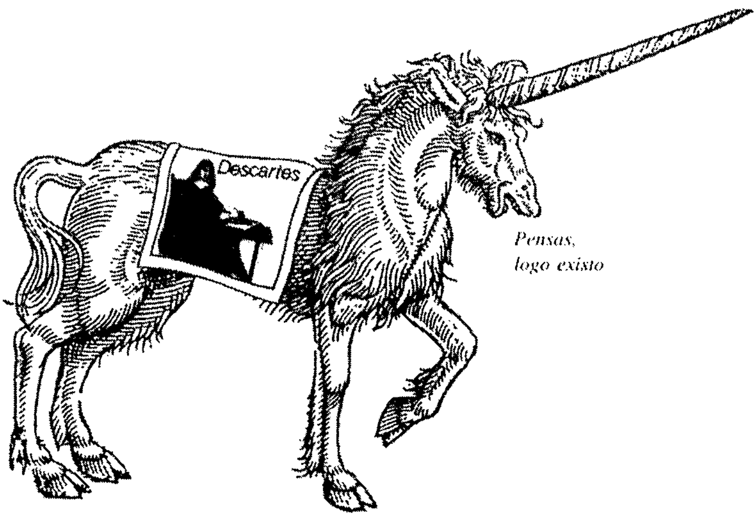
Seja *X* um conjunto e *F* um filtro em *X*. Demonstra-se (com base no princípio da boa ordenação) que existe um filtro maximal *V* que contém *F*. Ou seja, *V* é um filtro em *X* e, se a esse filtro se acrescentar um subconjunto de *X* que ainda não lhe pertença, então o resultado deixa de ser um filtro. Um objecto que verifique esta condição é conhecido por *ultrafiltro*.

Temos, pois, como caso particular, o ultrafiltro de Fréchet. Por onde havemos de começar se pretendermos visualizar, entender ou representar o conteúdo do ultrafiltro de Fréchet? O que está dentro do ultrafiltro e o que está fora? No entanto, este é um ponto de partida para uma importante investigação em teoria de conjuntos e em lógica contemporânea. Nestes altos píncaros de construção e de abstracção uma boa parte de todos os matemáticos ficou já pelo caminho; o mundo em que vive o ultrafiltro de Fréchet é propriedade de uma fracção muito reduzida da humanidade.

Ludwig Wittgenstein
1889-1951

«Como poderemos encontrar uma maneira de nos decidirmos acerca da existência de unicórnios?», perguntou L. Wittgenstein num artigo intitulado «On certainty». O unicórnio é um animal com corpo de cavalo e com um longo chifre a sair-lhe da fronte. Existem descrições desse animal escritas por Ctésias e Aristóteles. Está minuciosamente retratado em diversas obras de arte, incluindo a famosa *Unicorn Tapestry*, em Nova Iorque, e o brasão do Reino Unido. Muitas crianças reconheceriam um unicórnio se lhes fosse dada a observar a imagem de um, ou, dada uma figura de um animal qualquer, seriam facilmente capazes de decidir se essa imagem corresponderia ou não a um unicórnio. Podemos responder a muitas perguntas sobre esse animal: quantas patas tem, ou o que provavelmente come. Em poesia simboliza a pureza. Há quem diga que o chifre, depois de pulverizado, é um antídoto contra o veneno. Pois tudo isto e muito mais poderá afirmar-se do unicórnio, como ainda o facto de que tal animal não existe.

O unicórnio existe como lenda literária. Existe como esquema zoológico. Mas, como criatura viva que possa eventualmente ser capturada e



exposta num jardim zoológico, não existe. É concebível que tenha outrora existido, ou que venha ainda a existir, mas hoje não existe.

Tal como para o unicórnio, não há uma noção única de existência que possamos aplicar aos objectos matemáticos. A existência está intimamente relacionada com a situação, as exigências e o uso. $\sqrt{2}$ existe tanto como inteiro ou fracção como um peixe tropical vive nas águas do Árctico. Porém, no conjunto dos números reais, $\sqrt{2}$ está bem e recomenda-se. O *moser* não existe como expansão decimal completa; existe, no entanto, como programa ou conjunto de regras para a sua construção. O ultrafiltro de Fréchet existe na matemática que aceita o axioma da escolha (v. axioma 8 na p. 138.)

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. Freudenthal [1978].

Demonstração

Houve quem afirmasse que a característica que distingue a matemática é algo a que se chama «demonstração». Atribui-se a Tales de Mileto (600 a. C.) a primeira demonstração na história da matemática. Tales demonstrou

Tales de Mileto
c. 624-548 a. C.

Pitágoras
c. 580-500 a. C.

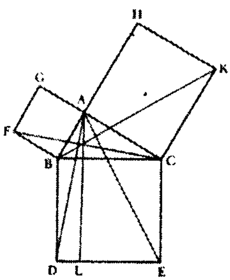
que o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. Ora esta afirmação é tão simples que parece óbvia. O génio nesse acto consistiu em ter-se apercebido de que demonstrar é possível e necessário. O que eleva a demonstração matemática acima do mero pedantismo é a sua aplicação a situações em que as afirmações em causa são bem menos transparentes. Na opinião de algumas pessoas, a demonstração é o propósito da acção matemática; sem demonstração não pode haver matemática. Na opinião de outras, isso é um disparate; há muitos outros propósitos na matemática.

Para discutirmos o que é, como opera e para que serve a demonstração é necessário confrontarmo-nos com um exemplo concreto de alguma complexidade; e para isso nada melhor do que estudarmos aquele que é, sem dúvida, o teorema mais conhecido de toda a história da matemática, na versão que consta do mais célebre livro de toda a história da matemática. Referimo-nos ao teorema de Pitágoras, tal como figura na proposição 47, livro I, dos *Elementos* de Euclides (300 a. C.). Traduzimos da versão inglesa de Sir Thomas Heath. Os números encostados à direita no texto são referências a resultados estabelecidos anteriormente ou a «noções comuns»:

Proposição 47

Em triângulos rectângulos a área do quadrado apoiado no lado que subtende o ângulo recto é igual à soma das áreas dos quadrados apoiados nos lados que contêm o ângulo recto.

Seja ABC um triângulo rectângulo com o ângulo BAC recto.



Afirmo que o quadrado em BC é igual aos quadrados em BA, AC.

Pois esteja sobre BC o quadrado BDEC e sobre BA, AC, os quadrados GB, HC; [1.46] desenhe-se AL passando por A e paralela quer a BD, quer a CE, e una-se AD, FC.

Então, uma vez que qualquer dos ângulos BAC, BAG, é recto, resulta que com a recta BA, e no ponto A sobre esta, as duas rectas AC, AG,

não se situando do mesmo lado, tornam os ângulos adjacentes iguais a dois ângulos rectos; portanto, CA está em linha recta com AG [1.14].

Pela mesma razão, também BA está em linha recta com AH.

E, sendo o ângulo DBC igual ao ângulo FBA, pois cada um deles é recto, some-se o ângulo ABC a cada um; portanto, o ângulo total DBA é igual ao ângulo total FBC [C. N. 2].

E, sendo DB igual a BC, e FB a BA, as duas arestas AB, BD, são, respectivamente, iguais aos dois lados FB, BC, e o ângulo ABD é igual ao ângulo FBC; a base AD é, portanto, igual à base FC e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC [1.4].

Ora, o paralelogramo BL é o dobro do triângulo ABD, pois possuem a mesma base BD e assentam sobre as mesmas paralelas BD, AL [1.41].

E o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC, pois possuem novamente a mesma base FB e assentam sobre as mesmas paralelas FB, GC [1.41].

Mas os dobros de iguais são iguais um ao outro.

Portanto, o paralelogramo BL é também igual ao quadrado GB.

De modo semelhante, se AE e BK forem unidos, demonstra-se também ser o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado total BDEC é igual aos dois quadrados GB, HC [C. N. 2].

E o quadrado BDEC está sobre BC, e os quadrados GB, HC, sobre BA, AC.

Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, etc., QED.

Ora, supondo que lemos Euclides até à proposição 47 e somos dotados de capacidade intelectual para apreendermos a matéria, que pensar disto? No seu *Brief Lives,* John Aubrey atribui a Thomas Hobbes (1588-1679) aquela que é porventura a reacção mais bela de que há registo:

> Tinha já 40 anos quando pela primeira vez deu atenção à geometria, o que se deu por acaso. Estando numa biblioteca de cavalheiros, deu com os *Elementos* de Euclides abertos na 47 *El. libri I.* Leu a proposição. *Por Deus,* disse (era seu hábito lançar de quando em vez um impropério para enfâse), *isto é impossível!* Lê então a sua demonstração, que o remetia para outra proposição, a qual também leu. Essa remeteu-o para outra, a qual também leu. *Et sic deinceps* [e por aí adiante] até ficar por fim demonstradamente convencido da verdade. E isto apaixonou-o pela geometria.

Aquilo que inicialmente parece pouco intuitivo, dúbio e mesmo um tanto misterioso acaba, após um certo processo mental, por se revelar

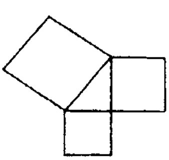
gloriosamente verdadeiro. Euclides sentir-se-ia orgulhoso de Hobbes e encontraria nele uma óptima justificação para todo o esforço que despendeu na compilação dos *Elementos*. Eis, pois, o processo demonstrativo, descoberto e divulgado pela matemática grega, ao serviço da confirmação e da certificação. Uma vez demonstrada uma afirmação, é entendido por todos que a sua validade está acima de qualquer dúvida.

A alusão a resultados anteriores que Hobbes menciona é característica do método demonstrativo e, como se sabe, não pode prosseguir indefinidamente. Termina com os chamados *axiomas* e *definições*. Enquanto estas últimas são simples convenções linguísticas, os axiomas correspondem a factos fundamentais e manifestamente evidentes sobre os quais está firmada toda a estrutura, erguida e sustentada pelos parafusos da lógica.

Outra característica do método demonstrativo é o grau de abstracção notável com que deparamos na definição de conceitos como os de triângulo, ângulo recto, quadrado, etc. A própria figura surge aqui como um auxiliar indispensável à verbalização. Sem a ajuda da figura não conseguimos acompanhar todo o raciocínio apresentado no texto de Euclides, e, se somos incapazes de formar uma imagem mental, seremos obrigados a suprir qualquer figura que o autor omita. Note-se também como é formal e restritiva a linguagem da demonstração. Não é uma linguagem para a história, para a literatura ou para a vida quotidiana; é uma linguagem aperfeiçoada e afinada para satisfazer as necessidades bem definidas de um propósito intelectual bem definido, mas restrito.

Uma das reacções a este material foi registada pela poetisa Edna Millay ao escrever «ninguém senão Euclides jamais viu a beleza pura». Pode mesmo percorrer-nos um calafrio de emoção se acreditarmos que com umas poucas linhas mágicas de demonstração obrigámos todos os triângulos rectângulos no universo a obedecer à regra pitagórica.

A abstracção, a formalização, a axiomatização e a dedução — são estes os ingredientes mágicos da demonstração. E as demonstrações em matemática contemporânea, embora trabalhando com outras matérias-primas ou situando-se a um nível mais profundo, evocam no estudante e no investigador uma sensação que é essencialmente idêntica à que transcrevemos acima.



Continuando a leitura da obra-prima de Euclides, surgem outras questões. Repare-se que certas linhas na figura, como BK e AL, nos parecem irrelevantes para a construção de uma figura mínima que desenharíamos de forma a exprimir o próprio teorema. A figura aqui apresentada é um triângulo rectângulo

com quadrados desenhados sobre cada uma das três arestas. As linhas irrelevantes, a que no liceu chamamos «linhas auxiliares», tornam a figura mais complexa, mas constituem parte essencial do processo dedutivo. Reorganizam a figura em subfiguras, e é precisamente a esse nível que se desenvolve o raciocínio.

Ora, onde deveremos desenhar essas linhas com que havemos de raciocinar? Ficamos com a impressão de que essas linhas são contingentes ou fortuitas. Em certo sentido, isso é verdade, mas é exactamente aí que reside o talento e o génio. Definir as linhas faz parte da descoberta da demonstração e pode não ser nada fácil. É com a experiência que ganhamos a perspicácia e a perícia que nos levam a encontrarmos as linhas auxiliares mais adequadas. Alguns fá-lo-ão melhor do que outros. Não há nenhum método infalível para descobrir demonstrações. Este triste facto é tão exasperante para alunos como para matemáticos profissionais. A matemática como um todo pode, pois, ser encarada como uma sistematização dos problemas que foram atacados com êxito.

A matemática é então a disciplina em que se demonstra. O primeiro contacto com a demonstração acontecia tradicionalmente com Euclides: gastaram-se milhares de horas em aula sobre aula, país após país, geração após geração, demonstrando e voltando a demonstrar os teoremas de Euclides. Com o aparecimento da «nova matemática» na década de 50, a demonstração alastrou a outros tópicos da matemática do liceu, como a álgebra, e temas como a teoria dos conjuntos foram deliberadamente introduzidos para servirem de instrumentos aos métodos e demonstrações axiomáticas. Na universidade, uma aula normal de matemática avançada, especialmente quando leccionada por um professor com interesses «puros», era totalmente composta por uma concatenação solene e inalterável de definição, teorema, demonstração, definição, teorema, demonstração. Porquê? Se, como se diz, a demonstração é uma validação e uma certificação, então seríamos levados a acreditar que, mal um grupo de estudiosos competentes aceitasse uma demonstração, o restante do mundo académico acreditaria de bom grado e prosseguiria a partir daí. Por que razão os matemáticos e os seus alunos vêem mérito em demonstrar repetidamente o teorema de Pitágoras ou os teoremas de Lebesgue, Wiener ou Kolmogoroff?

A demonstração cumpre simultaneamente vários objectivos. Ao ser exposta ao escrutínio e à análise crítica de uma nova plateia, a demonstração passa por um processo constante de revalidação. A exposição incessante esclarece erros, ambiguidades e equívocos. A demonstração traz consigo a respeitabilidade. A demonstração é a garantia de autoridade.

Na melhor das hipóteses, a demonstração aumenta o entendimento ao revelar o âmago da questão. A demonstração sugere nova matemática. O principiante aproxima-se da criação de nova matemática ao estudar demonstrações. A demonstração é energia matemática, a corrente eléctrica que dá vida aos enunciados estáticos dos teoremas.

Finalmente, a demonstração é um ritual e uma celebração da força da razão. Um tal exercício em confirmação pode tornar-se muito necessário, se considerarmos todas as confusões em que o raciocínio claro muitas vezes nos enreda.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

R. Blanché; J. Dieudonné [1971]; G. H. Hardy; T. Heath; R. Wilder [1944].

O infinito ou a fonte milagrosa da matemática

A matemática é, para alguns, a ciência do infinito. Enquanto afirmações como «2 + 3 = 5», «$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$» e «71 é número primo» são exemplos de matemática finita, crê-se que do facto de acrescentar o infinito ao universo do discurso resulta matemática importante. Os depósitos contemporâneos de objectos matemáticos estão cheios de infinitos. Não é fácil evitar o infinito. Vejamos algumas expressões comuns, como «existe um número infinito de pontos sobre a linha real»:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}1/n^2=\pi^2/6 \qquad \int_0^{\infty}\frac{sen\,x}{x}\,dx=\pi/2 \qquad \aleph_0+1=\aleph_0$$

«existem números primos infinitos», «será que o número de primos gémeos é infinito?», «pressupõe-se que a fita de uma máquina de Turing tem comprimento infinito», «seja *N* um inteiro infinito extraído do conjunto dos hiper-reais». Temos infinitos e infinitos de infinitos, infinitos numa abundância que excede qualquer sonho de avareza conceptual.

De todos os objectos infinitos, o sistema dos inteiros positivos 1, 2, 3, 4, 5, ... é o mais simples. As reticências mostram que a lista continua indefinidamente. Nunca pára. Este sistema é tão comum e tão útil que é conveniente identificá-lo com um nome. Alguns autores chamam-lhe *N* (de números) ou *Z* (de *Zahlen*, se preferem dar-lhe um gosto europeu). Uma das propriedades do conjunto *N* é a de que, se contém um número, então também contém o sucessor desse número. O mesmo é dizer que não

pode existir um número maior do que todos os outros, pois podemos sempre somar um e obter outro ainda superior. Outra propriedade de N é que não é possível esgotá-lo eliminando os seus elementos um a um. Mesmo depois de remover 6 e 83, N é ainda um conjunto infinito. O conjunto N é uma fonte inesgotável, uma fonte milagrosa que nos traz à memória o milagre dos peixes e dos pães descrito em Mateus, 15, 34.

A fonte milagrosa, com todas as suas propriedades que parecem entrar em contradição com toda a experiência da nossa vida finita, é um objecto absolutamente fundamental em matemática, e pensa-se que pode ser facilmente compreendido por alunos na escola primária. A matemática pede-nos fé nesta fonte milagrosa, e não iremos longe se não atendermos a este pedido.

É fascinante especular sobre como terá entrado na matemática a noção de infinito. Devido à percepção de longos intervalos de tempo? A percepção de longas distâncias, como os vastos desertos da Mesopotâmia ou a distância em linha recta entre a terra e o firmamento? Ou terá sido a esforço da alma na sua caminhada em direcção à compreensão e à percepção, ou em direcção a um insondável objectivo último?

O infinito é aquilo que não tem fim. É o eterno, o imortal, aquilo que se renova a si própro, o *apeiron* dos Gregos, o *ein-sof* da Cabala, o olho cósmico dos místicos, pelo qual a divindade nos observa e nos transmite energia.

Reparemos na equação

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots =1$$

ou, em notação mais elegante, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. O lado esquerdo parece não ter fim, é um esforço infinito. O lado direito é finito, concluído, perfeito. A tensão entre os dois lados é uma fonte de energia e de paradoxo. É irresistível o desejo matemático de construir a ponte entre o finito e o infinito. Queremos completar o que está incompleto, agarrá-lo, prendê-lo e subjugá-lo*.

* Kunen relata um jogo em que dois matemáticos com um conhecimento profundo do infinito entram em disputa tentando citar um número superior ao do adversário. É claro que basta somar um para obter um número maior, mas o objectivo do jogo, tal como o jogam estes peritos, é marcar pontos encontrando paradigmas completamente novos para a construção de cardinais. O jogo decorre mais ou menos assim:

- XVII;
- 1 295 387;
- $10^{10^{10}}$;
- w;
- $w_{(w_w)}$;
- O primeiro cardinal inacessível;

A matemática crê ter já alcançado êxito nesta tarefa. O inefável recebe nome, é transformado, subjugado, explorado, tornado finito e, enfim, banalizado. Será então que o infinito matemático é uma fraude? Será que representa algo que, na verdade, não é infinito? A matemática exprime-se numa linguagem que emprega um número finito de símbolos concatenados em sequências de comprimento finito. Algumas dessas frases parecem exprimir factos acerca do infinito. Não será isso apenas um truque de linguagem pelo qual interpretamos certas expressões como referindo-se a «objectos infinitos»? Quando o infinito é subjugado, passa a gozar de uma existência simbólica.

Cantor sugeriu o símbolo $\aleph_0$ («álefe zero») para designar o número cardinal infinito representado pelo conjunto N dos números naturais. Mostrou que esse número obedecia a leis aritméticas muito diferentes das que se aplicam aos números finitos: por exemplo, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, etc.

Ora, não seria difícil construir uma calculadora portátil com um botão $\aleph_0$ que obedecesse a estas leis de Cantor. Mas, se $\aleph_0$ foi rodeado algoritmicamente por uma estrutura finita, qual será então a sua qualidade de infinito? Serão apenas infinitos simulados? Pensamos em grande, mas agimos em pequeno. Pensamos em infinitos e calculamos quantidades finitas. *A posteriori,* esta redução é relativamente evidente, mas a sua metafísica está longe de ser totalmente compreendida.

A matemática pede-nos então que acreditemos num conjunto infinito. Que significa afirmar a existência de um conjunto infinito? Porque deveremos acreditar nela? Numa apresentação formal, esse pedido é feito pela axiomatização. Por exemplo, lemos na p. 54 da *Introduction to Set Theory,* de Hrbacek e Jech:

> Axioma do infinito. Existe um conjunto indutivo (isto é, infinito).

Comparemos com o enunciado do axioma de Deus apresentado por Maimónides (*Mishneh Torah,* livro I, capítulo I):

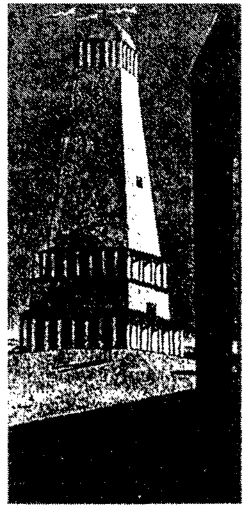
> O postulado elementar dos postulados elementares e o suporte de toda a ciência é a compreensão da existência de um primeiro ser que é a causa da existência de todas as outras coisas.

- O primeiro cardinal hiperinacessível;
- O primeiro cardinal de Mahlo;
- O primeiro hiper-Mahlo;
- O primeiro cardinal fracamente compacto;
- O primeiro cardinal inefável.

É evidente que seria batota indicar um cardinal que não existe, e um dos problemas fundamentais na teoria dos grandes cardinais é precisamente esclarecer em que sentido poderá sustentar-se a existência destes hipers e destes inefáveis.

Supomos que os axiomas da matemática são manifestamente evidentes, mas poderá parecer que, no que toca a ser evidente, o axioma do infinito e o axioma de Deus são semelhantes. Onde está a teologia e onde está a matemática? Será que isto deve levar-nos a crermos que um axioma é uma mera posição dialéctica sobre a qual se constroem outros raciocínios, apenas uma abertura sem a qual não podemos iniciar o jogo?

Onde há poder há perigo. Isto aplica-se tanto em matemática como no governo de um reino. Deve-se tomar especial precaução com qualquer raciocínio em que surja o infinito, pois este tem--se revelado uma fonte de paradoxos e fenómenos estranhos. Entre os muitos paradoxos que envolvem o infinito destaca-se o paradoxo de Zenão sobre Aquiles e a tartaruga, o paradoxo de Galileu, o paradoxo de Berkeley sobre os infinitesimais (v. cap. 5, «Análise não standard»), uma enorme quantidade de paradoxos que têm a ver com manipulações de séries e de integrais infinitos, paradoxos de não-compactidade, o paradoxo de Dirac da função útil, mas que não existe, etc. Aprendemos com cada um destes paradoxos algo de novo sobre o comportamento dos objectos matemáticos e sobre como devemos falar sobre eles. Conseguimos extrair de cada um deles o veneno da contradição e reduzir o paradoxo a simples comportamento regular dentro de um sistema especial.



A exposição às ideias da matemática moderna levou alguns artistas a tentarem representar graficamente as propriedades fantasmagóricas do infinito. (De Chirico, Nostalgia of the Infinite.) 1913-1914? (com a data de 1911).

Fonte: Museu de Arte Moderna

O paradoxo de Aquiles e da tartaruga diz-nos que Aquiles nunca poderá alcançar a tartaruga, pois antes tem de chegar ao ponto donde a tartaruga partiu e, portanto, a tartaruga leva sempre a dianteira.

O paradoxo de Galileu é a observação de que existem tantos quadrados perfeitos quanto inteiros, e vice-versa. Podemos ver isso pela correspondência

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25\ldots \end{array}$$

Porém, como poderá isso acontecer se nem todos os números são quadrados perfeitos?

Galileu Galilei
1564-1642

Os paradoxos da reordenação afirmam que é possível alterar a soma de uma série infinita por reordenação dos respectivos termos.

Por exemplo:

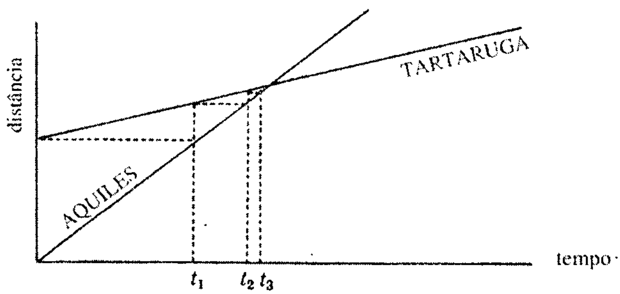
$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 1 +$$
$$+ (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

A função d(x) de Dirac é definida por

$$\delta(x) = 0 \quad \text{se } x \neq 0 \qquad \delta(0) = \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

o que é contraditório no contexto da análise clássica.

O paradoxo de Aquiles é um exemplo de parametrização irrelevante:



É claro que a tartaruga vai sempre à frente na sucessão infinita de instantes t_1, t_2, t_3, ... relativamente aos quais Aquiles chega ao ponto em que a tartaruga estava no instante anterior. E então? Porquê limitar a discussão somente à sequência convergente de instantes t_1, t_2, ...? Este exemplo mostra bem por que devemos prestar atenção à floresta, e não às árvores.

O paradoxo de Galileu pode ser compreendido se tivermos em atenção que o fenómeno descrito é característico dos conjuntos infinitos. Um conjunto infinito é simplesmente qualquer conjunto que possa ser posto em correspondência biunívoca com um seu subconjunto estrito. A aritmética do infinito não é a aritmética do finito. Não é por Cantor nos assegurar a veracidade de $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ que temos o direito de tratar $\aleph_0$ como uma quantidade finita, subtraí-lo de ambos os membros da equação e chegar à conclusão paradoxal de que $1 = 0$.

O paradoxo de Berkeley foi de início ignorado e posteriormente contornado utilizando limites na formalização do cálculo. Na última

década a análise «não standard», finalmente, normalizou-o de uma forma que parece manter as características que os criadores do cálculo inicialmente lhe atribuíram.

Os paradoxos da reordenação, agregação e não-compactidade são hoje em dia tratados rotineiramente por qualificação e restrição a séries e integrais absolutamente convergentes, à convergência uniforme e a conjuntos compactos. Como um esquiador de *slalom,* o matemático cuidadoso tem os limites do seu percurso marcados por centenas de bandeirolas.

O paradoxo de Dirac, que afirma a existência de uma função com propriedades contraditórias, é resolvido pela introdução de vários cálculos operacionais, como os de Temple-Lighthill, de Mikusinski ou, porventura o mais conhecido de todos, a teoria das distribuições de Schwartz (funções generalizadas).

O infinito foi, pois, vencido, dominado e amestrado de várias formas. Mas é da sua natureza ser expansível; emergirá sempre a necessidade de reparos cosméticos.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

B. Bolzano; D. Hilbert; K. Kuhnen; L. Zippin.

A corda esticada

Nas formalizações correntes da matemática recorre-se ao uso de coordenadas para reduzir a geometria à álgebra e à análise. Estas últimas são, por sua vez, reduzidas a números através de construções bem conhecidas da teoria de conjuntos. Isto faz-se porque a opinião consensual pelo fim do século XIX era a de que a noção intuitiva de número é clara como água, enquanto a noção de linha recta se torna tanto mais subtil e obscura quanto mais tentamos estudá-la. Parece evidente, no entanto, que as intuições geométricas antecedem histórica e psicologicamente as intuições aritméticas.

Alguns povos primitivos não possuem palavras para números, com a excepção de um, dois e muitos. Mas em qualquer cultura humana que encontremos é importante ir de um lugar para outro, buscar água ou colher frutos. Os seres humanos são, portanto, obrigados a descobrir — não uma vez, mas sempre, em cada nova vida humana — o conceito de linha recta, o caminho mais curto daqui para ali, a acção que é seguir directamente em direcção a algo.

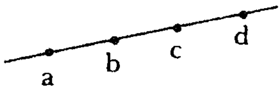
Na natureza pura, não tocada por mãos humanas, observam-se linhas rectas no seu estado primitivo. As folhas das ervas e os pés de milho erguem-se na vertical, as pedras caem a direito, objectos sobre a mesma linha de mira são vistos co-linearmente. Porém, quase todas as linhas rectas que vemos em nosso redor são artefactos humanos aí colocados por acção humana. O tecto e a parede têm em comum uma linha recta, as portas e as janelas e os tampos das mesas são delimitados por linhas rectas. Vemos pela janela que as empenas e os cantos nos telhados se encontram segundo linhas rectas e que as telhas estão dispostas em fileira sobre fileira, todas a direito.

Sentimos que o mundo em que vivemos nos obrigou a criar a linha recta de modo a optimizarmos as nossas tarefas, não só para nos deslocarmos tão rapida e facilmente quanto possível de um ponto até outro, mas também para resolvermos outros problemas. Por exemplo, quando queremos construir uma casa com blocos de argila, rapidamente descobrimos que esses blocos deverão ser direitos para que assentem uns sobre os outros da melhor forma possível. O conceito de linha recta é, pois, sustentado pela imaginação visual e cinestética. Sentimos nos nossos músculos o que é seguir em linha recta em direcção ao nosso objectivo, podemos verificar com os nossos olhos se alguém se desloca segundo uma linha recta. A interacção entre estes dois sentidos atribui ao conceito de linha recta uma tal solidez que conseguimos manipulá-lo como se fosse um objecto físico que tomamos nas nossas mãos.

Quando a criança tiver crescido o suficiente para se ter tornado um filósofo, o conceito de linha recta ter-se-á tornado já tão intrínseco e fundamental à sua maneira de pensar que poderá até ser considerado uma forma eterna, um elemento da grande legião celeste dos ideais de que possui recordações que antecedem o próprio nascimento. Ou, não se invocando Platão, mas Aristóteles, poderá pensar que a linha recta é um aspecto da Natureza, uma abstracção de uma qualidade observada nos objectos físicos. Tenderá a esquecer até que ponto as linhas que vê existem por as termos inventado e as termos construído. No decorrer da actividade física humana, a linha recta penetra na mente humana e torna-se aí um conceito partilhado, a linha recta acerca da qual raciocinamos, a linha recta da matemática. Descobrimos, enquanto matemáticos, que é possível demonstrar teoremas acerca de geodésicas — os caminhos mais curtos, as soluções para o problema de minimizar a distância de um ponto até outro — e teoremas acerca de caminhos de curvatura constante — caminhos que «não se alteram» se os fizermos deslizar sobre si próprios.

Em que consiste exactamente a «rectidão» da linha recta? Não há dúvida de que existe nesse conceito mais do que aquilo que conhecemos

e mais do aquilo que conseguimos exprimir por palavras ou por fórmulas. Damos um exemplo desse «mais». Sejam A, B, C e D quatro pontos sobre uma linha recta. Admitamos que B se encontra entre A e C e ainda que C se encontra entre B e D. Que podemos então concluir acerca de A, B e D? Não demoramos muito a concluir que B deverá situar-se entre A e D:



Por muito surpreendente que tal possa parecer, não é possível demonstrar esta proposição a partir dos axiomas de Euclides; é necessário tomá-la como um novo axioma da geometria. Esta omissão foi notada pela primeira vez por M. Pasch em 1882, 2000 anos depois de Euclides! Além do mais, a demonstração completa de alguns teoremas importantes de Euclides exige o axioma de Pasch, sem o qual essas demonstrações não são válidas*. Este exemplo mostra que um conceito intuitivo pode não ser completamente descrito pelos axiomas expressos numa teoria.

O mesmo sucede na matemática contemporânea. O lógico norueguês Thorolf Skolem descobriu que existem estruturas matemáticas que satisfazem os axiomas da aritmética, mas que são muito maiores e mais complexas do que o sistema dos números naturais. Estas «aritméticas não standard» podem conter inteiros infinitamente grandes. Para raciocinarmos sobre os números naturais dependemos da imagem mental que deles construímos. O exemplo de Skolem mostra que essa imagem contém mais informação do que os axiomas comuns para a aritmética.

A conclusão de que B está entre A e D no axioma de Pasch poderá parecer trivial. Para aí chegarmos basta desenharmos uma pequena figura com papel e lápis. Seguimos as instruções acerca da disposição dos pontos e observamos que, como resultado, B fica entre A e D. Por outras palavras, usamos uma linha em papel para determinarmos as propriedades da linha ideal, da linha matemática. Não podia ser mais simples. Há, contudo, dois aspectos que merecem ser realçados do segundo plano em que costumam permanecer ocultos. Em primeiro lugar, sabemos que a linha ideal é diferente da linha que desenhamos no papel. Algumas das propriedades da linha no papel são «contingentes» e não se aplicam à linha ideal. Como podemos distinguir quais são essas propriedades?

Completámos a figura para o axioma de Pasch colocando os pontos A, B, C e D em posições arbitrárias. Podíamos tê-la desenhado de inú-

* H. Guggenheimer provou que é possível fazer uma demonstração para uma variante do axioma de Pasch utilizando o quinto postulado de Euclides.

meras outras formas, pois somos livres de decidir qual a distância que separa quaisquer dois pontos. Temos, no entanto, a certeza de que a resposta seria sempre a mesma: B entre A e D. Desenhámos apenas uma figura, mas acreditamos que essa figura é, de certo modo, equivalente a todas as figuras possíveis. Como podemos ter essa certeza?

A resposta prende-se com o conceito intuitivo e explícito que é comum a todos nós e sobre o qual possuímos algum conhecimento fiável. Todavia, o conhecimento que possuímos sobre esta noção intuitiva não é de forma alguma completo — nem no sentido de ser conhecimento explícito nem de constituir uma base da qual possamos derivar, possivelmente por raciocínios complexos, todo o conhecimento.

Uma das mais antigas questões acerca da linha recta (uma questão que vem já do tempo de Zenão) é a seguinte: será possível dividir um segmento de comprimento finito num número infinito de partes? Para um leitor com formação matemática, a resposta é imediatamente afirmativa. Esperamos que não se encontrem muitas pessoas, se é que existe alguma, que questionem este dogma. Mas as coisas eram diferentes há duzentos anos.

Ouçamos a opinião de George Berkeley sobre este assunto:

> [...] dizer que as partes de uma quantidade ou de uma extensão finita são em número infinito é uma contradição tão evidente que qualquer um o reconhece de imediato. E é impossível que com ela concorde qualquer criatura sensata que até aí não tenha sido vagarosamente conduzida em passos curtos, tal como um gentio que se converte à fé na transubstanciação.

Caso aceitemos Berkeley como testemunha fiável sobre a noção intuitiva de linha recta no século XVIII, somos porventura forçados a concluir que a questão da divisibilidade infinita da recta não estava ainda decidida. Chegando ao século XX, a questão foi resolvida pelo peso de dois séculos de aplicação bem-sucedida de análise matemática. É hoje intuitivamente óbvio que «entre quaisquer dois pontos da recta existe um terceiro ponto».

A hipótese do contínuo em relação à linha recta é hoje em dia indecidível (v. cap. 5, «Teoria de conjuntos não cantoriana»). Isso é verdade em dois sentidos. Enquanto teorema matemático (os resultados de Gödel e Cohen), constitui uma afirmação acerca da axiomática de Zermelo-Frankel-Skolem. Provou-se que é impossível demonstrar a partir desses axiomas quer a hipótese do contínuo, quer a sua negação.

A hipótese do contínuo é também indecidível num sentido mais lato — no sentido em que ninguém conseguiu até hoje encontrar argumentos intuitivamente convincentes para que se aceite ou rejeite essa hipótese.

Os matemáticos que trabalham na teoria de conjuntos andam há mais de uma década em busca de um axioma atractivo ou plausível que decida a verdade da hipótese do contínuo e até agora ainda não encontraram nenhum.

Pode suceder que a nossa intuição sobre a linha recta seja permanentemente incompleta em relação a questões da teoria de conjuntos que lidem com conjuntos infinitos. Nesse caso, será legítimo escolher como axioma quer a hipótese do contínuo, quer a sua negação. Chegaríamos a versões diferentes da linha recta, sem que pudéssemos escolher qualquer delas como intuitivamente correcta.

A questão acerca da divisibilidade parece ter sido decidida pelo desenvolvimento histórico da matemática. Talvez a hipótese do contínuo seja resolvida de modo semelhante. Os conceitos matemáticos evoluem, progridem e nunca estão completamente assentes numa dada época histórica. O que não contradiz o facto de ser possível atribuir-lhes propriedades bem definidas, tanto conhecidas como desconhecidas, que lhes conferem o direito de serem considerados objectos bem definidos.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. Guggenheimer.

A moeda de Tyche

Quantos objectos matemáticos realmente elementares existem? Um deles é certamente a fonte milagrosa dos inteiros positivos, 1, 2, 3, ... Outro é a ideia da moeda imparcial. Embora os jogos de azar fossem comuns no mundo antigo e tanto gregos como romanos eminentes oferecessem sacrifícios à deusa da sorte, Tyche, a sua moeda não chegou ao mundo matemático senão durante a Renascença. Uma das causas deste atraso terá sido talvez a posição metafísica segundo a qual a comunicação entre Deus e os homens se faz por intermédio do acaso. Lemos no *Livro de Samuel* como em 1000 a. C. os Israelitas lançavam sortes para escolherem um rei:

> Samuel convocou todas as tribos de Israel, e a sorte recaiu sobre a tribo de Benjamim. Convocou então a tribo de Benjamim por clãs, e a sorte recaiu sobre o clã de Metri. Convocou então, um por um, o clã de Metri. E foi sobre Saul, filho de Cis, que recaiu a sorte.

Daqui se conclui não só que o sorteio é uma forma conveniente de escolher um dirigente, mas também que isso era feito com sanção divina e que o resultado exprime a vontade divina. Lançar uma moeda ao ar é ainda hoje um método muito utilizado para tomar decisões difíceis em situações de incerteza.

A moderna teoria das probabilidades tem o seu início quando Tyche é expulsa do Panteão. Surge a imagem de uma moeda justa, imparcial. Essa moeda reside num certo universo mental a que todos os modernos autores de probabilidades têm acesso. Estes autores lançam-na regularmente e constroem teorias sobre os resultados «observados». E que nos contam eles? Bem, a moeda imparcial é um exemplar novo em folha. Para maior comodidade, designa-se um dos lados por cara (*H*) e o outro por coroa (*T*). Lança-se repetidamente esta moeda imparcial e anotam-se os resultados. Há também o conceito de jogador imparcial, alguém que toma uma moeda imparcial e a lança sem subterfúgios, prestidigitações ou outras manipulações físicas suspeitas. Mas, para simplificar, acordemos em juntar a moeda que é lançada e o jogador que a lança num único conceito abstracto.

E o que observamos? (Lembremo-nos, não se trata de uma moeda real lançada por um jogador real, mas sim de uma abstracção.) Observamos os axiomas da «aleatoriedade». Após n lançamentos da moeda imparcial, contamos o número de caras e o número de coroas que resultaram. Chamemos $H(n)$ e $T(n)$ a estes valores. É evidente que

$$H(n) + T(n) = n \qquad (1)$$

uma vez que cada lançamento pode resultar apenas em H ou em T. Mas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(n)}{n} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

A este valor de ½ no limite chama-se, respectivamente, a probabilidade de sair H ou T:

$$p(H) = \frac{1}{2} \qquad p(T) = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Ou seja, não é necessário que a moeda imparcial caia 500 vezes em cara e 500 vezes em coroa em, digamos, 1000 lançamentos — a probabilidade ½ verifica-se apenas no limite.

Esta não é a única característica apresentada pela moeda imparcial. Se considerarmos somente o 1.º, o 3.º, o 5.º, ... lançamentos e os utilizarmos

para calcularmos as probabilidades, o resultado mantém-se. Se considerarmos apenas o 1.º, o 4.º, o 9.º, o 16.º, ... lançamentos, o resultado ainda se mantém.

Admitamos que, para seguirmos a crença popular de que «a longo prazo as coisas equilibram-se», consideramos apenas os lançamentos que se seguem imediatamente a uma série de quatro caras. Resultado: novamente metade para metade. Não predominam as coroas. Pelos vistos, as coisas não se equilibram assim tão depressa. Pelo menos não no sentido de se ganhar uma vantagem apostando na coroa depois de uma longa série de caras.

Isto leva-nos à ideia de que os lançamentos de uma moeda imparcial não dependem da escolha de posição. Ou seja, se considerarmos uma subsequência dos lançamentos definida por uma regra de escolha *R* baseada apenas nos lançamentos feitos até ao item seleccionado, a probabilidade resultante será ainda de ½.

Existe uma outra formulação desta independência em relação à selecção da posição, a que os físicos chamam *princípio da impotência:* é impossível definir um método de aposta que possa ser utilizado com sucesso contra uma moeda imparcial.

A intuição da impotência, estabelecida como axioma da aleatoriedade, deve ter-se feito sentir desde muito cedo. Talvez explique por que motivo Girolamo Cardano, um jogador inveterado e autor de *Ludo Aleae (Sobre o Jogo dos Dados),* um dos primeiros livros sobre a teoria das probabilidades, apresenta nessa sua obra conselhos práticos sobre como fazer batota. O que levanta esta questão metafísica: será possível fazer batota contra uma moeda imparcial?

As características que indicámos acima para a moeda imparcial constituem os fundamentos da probabilidade frequencista. Partindo daí, e levantando outras hipóteses acerca das probabilidades resultantes de mistura e de combinações, chegamos a uma teoria matemática completa. Qual a relação entre essa teoria e o comportamento das moedas no mundo real?

Encontramo-nos numa situação paradoxal. Numa sucessão matemática infinita de *H*s e de *T*s, as probabilidades dependem apenas do que sucede «no fim da sucessão», na sua «parte infinita». A informação proveniente de qualquer sequência finita no início não tem qualquer efeito sobre o cálculo das probabilidades! Mesmo com 1 milhão de *H*s seguido de *T*s e *H*s na proporção adequada, os limites serão ainda de um meio para um meio. Mas, na prática, é claro que, se lançarmos 1 milhão de caras consecutivas, somos forçados a concluir que a moeda está viciada.

Somos então levados a uma hipótese tácita, que é exterior à teoria formalizada, mas essencial em probabilidade aplicada, de que a convergência

de (2) é suficientemente rápida para conseguirmos determinar se uma dada moeda real pode ou não ser modelada por uma moeda imparcial.

A imagem e a intuição da moeda imparcial são nebulosas e o caminho para a axiomatização está repleto de armadilhas, como também o estão

HHHTHTHHTTTTTTHHHTHTHHTTTHTHTTTH
HHTHTHTHTHTTTTHTTTTTTTTHHHTTHHTTT
TTTHTTTHTHTTHHTHHHHTTHTTTHHTTHHT
HTTTHTTHTTTTTTTTTTTTHHTTTTHTTHTT
THHHHTHTTHTTTHTTHHHHHTTTHHTHHHHH
HHTTTHHTHHHTHTHHHTHHHHTTTHTTHTHH
HHHTHTHHTTTTTTHHHTHTHHTTTHTHTTTH
HHTHTHTHTHTTTTHTTTTTTTTHHHTTHHTTT
TTTHTTTHTHTTHHTHHHHTTHTTTHHTTHHT
HTTTHTTHTTTTTTTTTTTTHHTTTTHTTHTT
THHHHTHTTHTTTHTTHHHHHTTTHHTHHHHH
HHTTTHHTHHHTHTHHHTHHHHTTTHTTHTHH
HHTTHTHHHTHTTTHTTTTHHHTHHHHTHHTH
THHHTHTHHHHHHTHTTTTHTTHTTHHHHHHH
TTTTHTHHHTTHHHHHHHHHTHTTHHTHTTTT
TTTTTTTTHTTTTHTTHTHHHHHHHHTHTHTH
HHHHHTHHTHTHHHTTHTHHTTTHTHHTHTTH
THTTHHHTH HHTTTTTHH
HHHHTTTTH **Será esta uma** TTTHTHTHH
HTTHHTTHH **moeda imparcial?** HTHHTTHTH
HTTTTHHHH THHTHHHHH
THTHHHTTTHHHHTTTTHHHTHTTTHTHTHTH
THHTHHTTHTTTTHTHTHHHHHHHHHHTTTTH
HHHTTTTHHTHHTTHTTTTTHHTTTHHHHHTT
THTHHHTHTTTHHTTHHTHTTHHHHHHTHTHT
TTTHHTTTHTTTHTHTTTHTTTHHTTTHHHTH
HTTHHHHHTTHHHHTTHHTTTTTHHHTTTTHT
HTHTTHTHTHHHTHTTTTHHHHHHTTTTHTHT
HHTHHHTTHHHHHHHTHTTHHHHHHTTTTHHT
HHTHHHTTTTHHTHTTHTTHTTHHHHHTTHHT
HHHHTTHTHHTTTHHTTTTHHTTHHHHHHHTH
THTHHHTHTTTHHTTHHTHTTHHHHHHTHTHT
TTTHHTTTHTTTHTHTTTHTTTHHTTTHHHTH
HTTHHHHHTTHHHHTTHHTTTTTHHHTTTTHT
HTHTTHTHTHHHTHTTTTHHHHHHTTTTHTHT
HHTHHHTTHHHHHHHTHTTHHHHHHTTTTHHT
HHTHHHTTTTHHTHTTHTTHTTHHHHHTTHHT
HHHHTTHTHHTTTHHTTTTHHTTHHHHHHHTH

as bases filosóficas e psicológicas das probabilidades. Há pelo menos uma dúzia de definições diferentes de sucessão aleatória. Aquela que temos vindo a descrever foi proposta por Richard von Mises em 1919. Tornemos um pouco mais precisa esta definição. Queremos que a distribuição de *H*s e de *T*s para uma moeda imparcial seja, no limite, 50%-50%. Mas não só. Queremos também que cada um dos quatro possíveis resultados de dois lançamentos consecutivos, *HH, HT, TH, TT,* ocorra, no limite, com uma probabilidade de ¼. Pretendemos, naturalmente, que o mesmo se passe com os oito resultados possíveis de três lançamentos consecutivos:

Richard von Mises
1883-1953

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

e assim sucessivamente, para toda a subsequência consecutiva de lançamentos. Diz-se que tal sucessão é ∞-distribuída.

Diz-se que uma sucessão infinita x_1, x_2, ..., é aleatória no sentido de von Mises se qualquer subsucessão infinita x_{n1}, x_{n2}, x_{n2}, ..., definida por uma regra *R* for ∞-distribuída. E agora a grande surpresa: Joseph Doobs provou que não existe qualquer sequência aleatória no sentido de von Mises. As condições são logicamente contraditórias.

Somos então obrigados a recuar e a reduzir as nossas exigências. Para cálculos práticos — e as sucessões aleatórias são muito usadas na prática — aquilo que se pede é um pouco menos. Exige-se que uma sucessão de inteiros x_1, x_2, ..., seja fácil de programar e que o seu cálculo seja simples. A sucessão será periódica, mas o período deverá ser suficientemente elevado em relação ao número de lançamentos aleatórios desejados. Exige-se, por último, que a sequência seja suficientemente louca e baralhada para passar testes estatísticos de aleatoriedade, como testes de frequência, testes de séries, testes de distribuição de cartas de jogar, testes espectrais, etc. Ao programa que gera tal sequência chama-se gerador de números aleatórios, muito embora os inteiros sejam calculados sucessivamente por um programa determinista e, em princípio, nada tenham de imprevisível.

Um gerador de números aleatórios muito utilizado é definido pela fórmula

$$x_{n+1} = kx_n (\text{mod } m), \ x_0 = 1$$

Isto significa que cada elemento x_{n+1} da nossa sucessão aleatória é obtido a partir do seu antecessor x_n na sequência multiplicando por um certo número k e dividindo o resultado por um outro número m; x_{n+1} é o resto que se obtém dessa divisão.

Admitamos que o comprimento da palavra no computador é de b dígitos binários, ou *bits*. Escolhamos para k um número da forma $8t \pm 3$ próximo de $2^{b/2}$. Façamos $m = 2^b$. A multiplicação $k \cdot x_0$ resulta num inteiro que ocupa $2b$ bits. Os b bits de ordem superior são postos de lado, guardando-se os b bits de ordem inferior, que formam o resto x_1. Repete-se então o processo:

$$x_2 = kx_1 (\text{mod } m)$$

e novamente por aí adiante. A sequência apenas voltará a ser repetida depois de 2^{b-2} iterações. Se o comprimento da palavra no computador for de 35 *bits*, este sistema dará origem a uma sequência «aleatória» com cerca de $8{,}5 \times 10^9$ números.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. P. Edmundson; R. von Mises.

A componente estética

> «Podemos, em especial nas ciências matemáticas, observar a ordem, a simetria e a restrição; e estas são as formas superiores do belo.»
>
> ARISTÓTELES, *Metafísica,* M3, 1078b

Já muitos autores testemunharam o apelo estético da matemática tanto na contemplação passiva como na própria actividade de investigação. Autores clássicos e medievais, como Kepler, louvaram a «proporção áurea ou divina». Poincaré afirmou que o elemento dominante na criatividade matemática é o estético, e não o lógico. G. H. Hardy escreveu que «os padrões do matemático devem ser belos como os do pintor ou os do poeta [...]». O grande P. A. M. Dirac escreveu que nas equações a beleza é mais importante do que o ajustamento aos resultados experimentais.

A incapacidade de ver a componente estética da matemática está muito difundida e pode justificar o sentimento prevalecente de que a

matemática é árida como um deserto, emocionante como uma lista telefónica e distante como as leis dos clãs escoceses do século XV. Pelo contrário, o apreço por esta componente torna a matemática maravilhosamente viva e ardente como nenhuma outra criação da mente humana consegue ser.

Henri Poincaré
1854-1912

Tem-se discutido a beleza na arte e na música pelo menos desde o tempo de Platão, analisando--a em termos de conceitos tão vagos como os de ordem, proporção, equilíbrio, harmonia, unidade e clareza. Assistiu-se nas últimas dezenas de anos a tentativas de encontrar medidas matemáticas para a qualidade estética de trabalhos artísticos. Quando essas medidas são aplicadas com o computador a, por exemplo, critérios de composição musical, verifica-se que os programas resultantes conseguem capturar uma pequena parte das qualidades mais características de Mozart. Mas a noção da qualidade estética subjacente ainda não é palpável. Os juízos estéticos tendem a ser pessoais, a variar com as civilizações e com as gerações, e as discussões filosóficas sobre estética têm sido nos últimos anos menos em direcção a uma fórmula dogmática que defina o que é belo e mais em direcção a uma discussão sobre como actuam e funcionam os juízos estéticos.

Em matemática, o juízo estético existe, é importante, pode ser cultivado e transmitido de professor para aluno, de autor para leitor. Não há, porém, muitas descrições formais sobre o seu funcionamento. Não se encontram em livros escolares e monografias quaisquer comentários acerca do aspecto estético dos temas que são abordados, e, no entanto, o estético participa na própria maneira de criar e de seleccionar aquilo que se cria. Uma peça de arte, por exemplo um armário no estilo colonial de Rhode Island, não tem talhada em si uma descrição verbal da sua beleza única. Pertence a uma tradição estética, e isso é suficiente, excepto para os eruditos.

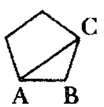
Foram já feitas tentativas no sentido de analisar a estética matemática em termos dos seus componentes — as alternâncias entre tensão e resolução, a realização das expectativas, a surpresa na percepção de relações e de identidades inesperadas, o prazer visual, o prazer na sobreposição do simples e do complexo, da liberdade e das restrições, e, claro, os elementos que se conhecem nas artes: a harmonia, o equilíbrio, o contraste, etc. Tentou-se também localizar a fonte destes sentimentos a um nível mais profundo, na psicofisiologia ou no inconsciente colectivo mítico de Jung. Embora a maior parte dos profissionais tenha uma forte opinião acerca da importância da estética e pudesse acrescentar as suas próprias cate-

gorias a esta lista, certamente seria bastante céptica quanto a explicações mais profundas.

Os juízos estéticos podem ser passageiros e ter origem nas tradições de uma certa época e cultura matemática. A sua validade é semelhante à de uma escola de arte. Outrora acreditava-se que o rectângulo mais belo é aquele que tem os respectivos lados na proporção áurea $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. A geração actual, formada à margem dos padrões clássicos de arte e arquitectura, teria dificuldade em levar a sério esta afirmação, apesar das experiências conduzidas por Fechner (1876) e Thorndike (1917), que parecem confirmá-la*. O prazer estético nessa proporção resulta hoje da inesperada variedade de situações em que surge.

Antes de mais, a geometria do pentágono regular. Se o lado AB do pentágono regular tem comprimento unitário, então o comprimento de qualquer linha AC é $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1{,}61803 \ldots$

Surge também nas equações de diferenças. Tomemos quaisquer dois números ao acaso, por exemplo 1 e 4. Somando esses números, teremos 5. Se somarmos 4 a 5, teremos 9. Somando 9 a 5, teremos 14. Repitamos indefinidamente este cálculo. Então, no limite, a proporção entre cada par de números consecutivos aproximar-se-á de Φ. Vejamos:



$1 + 4 = 5$	$^5/_4 = 1{,}250$
$4 + 5 = 9$	$^9/_5 = 1{,}800$
$5 + 9 = 14$	$^{14}/_9 = 1{,}555$
$9 + 14 = 23$	$^{23}/_{14} = 1{,}643$
$14 + 23 = 37$	$^{37}/_{23} = 1{,}608$
$23 + 37 = 60$	$^{60}/_{37} = 1{,}622$
$37 + 60 = 97$	$^{97}/_{60} = 1{,}617$
$60 + 97 = 157$	$^{157}/_{97} = 1{,}618$

Finalmente, as fracções contínuas dão-nos esta bela fórmula:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

---

* Para nossa surpresa, a razão de ouro parece ter sido levada a sério como princípio estético ainda em 1962 em *Structural Patterns e Proportions in Vergil's Aeneid* de G. E. Duckworth, Univ. of Michigan Press, 1962. Duckworth analisa a *Eneida* em termos da proporção $M/(M+m)$, em que M é o comprimento dos versos nos «trechos maiores» e m nos «trechos menores». Duckworth alega que essa proporção é, com precisão razoável, 0,618 $\left[= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$.

Mas, perguntará o principiante, qual é a ligação entre todas estas situações tão díspares para que todas conduzam a Φ? E o assombro conduz ao prazer, e o prazer à sensação de que o universo está unido por formas maravilhosas e insuspeitas.

Porém, outras sensações sobrevêm com o estudo e com a experiência. Quando se trabalha intensivamente em teoria de equações de diferenças, o inesperado deixa de ser inesperado e transforma-se numa sólida e eficaz intuição, com a correspondente redução, ou pelo menos certamente transformação, do prazer estético. Pode até dizer-se que as situações que nos provocam surpresa se tornam desconfortavelmente misteriosas, situações que procuramos eliminar, criando uma teoria geral que explique todos os sistemas específicos. Assim, os três exemplos que demos acima para Φ podem ser incluídos numa teoria geral dos valores próprios de certas matrizes. As tentativas de explicar a surpresa (e, portanto, de eliminá-la) transformam-se, assim, em pressão adicional no sentido de que se investigue mais e se atinja uma compreensão mais profunda.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. E. Huntley; L. Pacioli.

Padrões, ordem e caos

Verifica-se uma forte sensação subjectiva de prazer estético no fenómeno a que podemos chamar ordem vinda do caos. O próprio objectivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão*.

O sentido primitivo da palavra *caos* era o de um vazio escuro e informe a partir do qual, como pode ler-se em *Génesis*, 1, 2, se moldou o universo. Era a isto que John Milton se referia quando empregou o termo em *Paraíso Perdido,* numa paráfrase do Antigo Testamento:

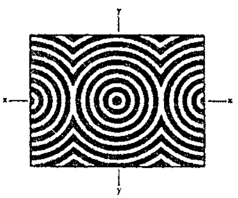
> Como no princípio a terra e o firmamento se levantaram do caos.

---

* Otto Neugebauer contou ao autor a seguinte história acerca de Einstein. Parece que em criança Einstein tardou a falar, o que naturalmente preocupava os pais. Finalmente, certa noite, ao jantar, começou subitamente a dizer «Die Suppe ist zu heiss» (a sopa está quente de mais.) Os pais ficaram muito aliviados, mas perguntaram-lhe por que não havia falado até então. A resposta: «Bisher war Alles in Ordnung.» (Até agora estava tudo em ordem.)

Desde Milton até hoje o significado da palavra *caos* alterou-se e humanizou-se. Caos tornou-se sinónimo de tumulto, desordem e confusão. O que é caótico é confuso, aleatório e irregular. Como contrário de caos temos a ordem, o arranjo, a regularidade, a previsibilidade, a compreensão. O caos é, na opinião do céptico, a situação normal da vida; na opinião do estudioso de termodinâmica, é o estado para o qual tudo se dirige quando deixado entregue a si próprio.

Se se pensar na omnipresença do caos, vê-se que seria mesmo muito difícil encontrar uma definição geral que permitisse decidir sobre a presença ou ausência de regularidade ou de ordem em cada situação; no entanto, é precisamente esta presença que torna o mundo compreensível. Distinguimo-la intuitivamente, o que, provavelmente, sucede como resposta a necessidades de sobrevivência. A capacidade de criar regularidade — em especial regularidade intelectual — é das capacidades mais humanas, e houve quem sugerisse que a matemática é a ciência da completa regularidade intelectual.



A regularidade, o padrão e as simetrias gráficas ou visuais têm sido definidos e analisados em termos de invariantes de grupos de transformação. Uma figura plana é simétrica em relação à linha $y = 0$ se não sofre alteração (se é invariante) sob a aplicação da transformação

$$\begin{cases} x' = -x \\ x' = y \end{cases}$$

«O matemático, como o pintor ou o poeta», escreveu G. H. Hardy, «é um mestre dos padrões.»

E que dizer então dos padrões que existem no próprio discurso matemático? Será que as teorias matemáticas sobre os padrões dizem respeito a si próprias?

Quando um cientista apresenta uma lei muito geral, o que está de facto a fazer é a indicar regras que substituem o caos anterior. O artista que desenha uma linha ou o compositor que escreve um compasso de música escolhem, de entre um número infinito de formas e de sons, aqueles que são regulares para nos apresentarem.

Consideremos quatro possibilidades: (1) a ordem que surge da ordem; (2) o caos que surge da ordem; (3) o caos que surge do caos; (4) a ordem que surge do caos. A primeira, a ordem que surge da ordem, parece razoável. É como a banda da universidade que desfila durante o intervalo do jogo e forma padrões engraçados sobre a relva do campo de futebol.

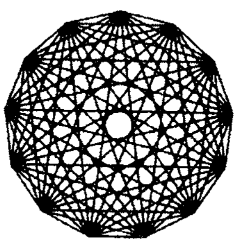
É bonita, as passagens de umas disposições para outras são interessantes, mas não necessariamente empolgantes. A segunda possibilidade, o caos que surge da ordem, é, infelizmente, muito comum. Uma forma de racionalidade acaba em confusão. É o elefante na loja de porcelanas, um acontecimento emotivo e doloroso. A terceira possibilidade, o caos que surge do caos, é o touro que corre livremente pelo baldio. Apesar da sua inteligência, o que acontece é essencialmente nada, não causa prejuízo, mal se nota. A quarta, a ordem que surge do caos, é o motivo natural do nosso esforço, merece-nos o maior apreço quando a atingimos.

Ilustramos a seguir estes quatro tipos de transformações com alguns padrões e teoremas matemáticos:

A ordem que surge da ordem

a) $1^3 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$

b) $\frac{4}{9} = 0{,}4444\ldots$
$\frac{5}{37} = 0{,}1\dot{3}5135135\ldots$

c) 

d) A tangente à cónica $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + Ey + F = 0$ no ponto (x_1, y_1) é definida pela equação $Axx_1 + B(xy_1 + x_1y) + Cyy_1 + D(x + x_1) + E(y + y_1) + F = 0$.

O caos que surge da ordem

a) $12 \times 21 = 252$
$123 \times 321 = 39483$
$1234 \times 4321 = 5332114$

12345 × 54321 = 670592745
123456 × 654321 = 80779853376
1234567 × 7654321 = 9449772114007
12345678 × 87654321 = 1082152022374638
123456789 × 987654321 = 121932631112635269

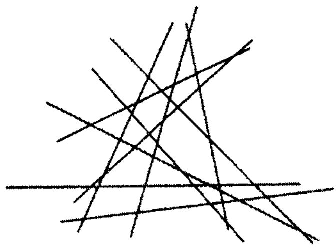
b) $\sqrt{2} = 1{,}4142\ 13562\ 37309\ 50488...$

c) $\pi = 3{,}1415\ 92653\ 58979\ 32384...$

O caos que surge do caos

a) 53278 × 2147 = 114387866

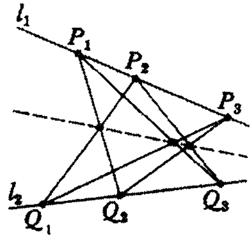
b)



c) $(1 + 3x^4 - 4x^5)(2 - x + 2x^2) = 2 - x + 2x^2 + 6x^4 - 11x^5 + 10x^6 - 8x^7$

A ordem que surge do caos

a) O teorema de Pappus: escolhendo arbitrariamente seis pontos sobre duas linhas l_1 e l_2, três sobre cada uma, segue-se que as intersecções de P_1Q_2 com P_2Q_1, de P_1Q_3 com P_3Q_1, de P_2Q_3 com P_3Q_2, são sempre co-lineares.



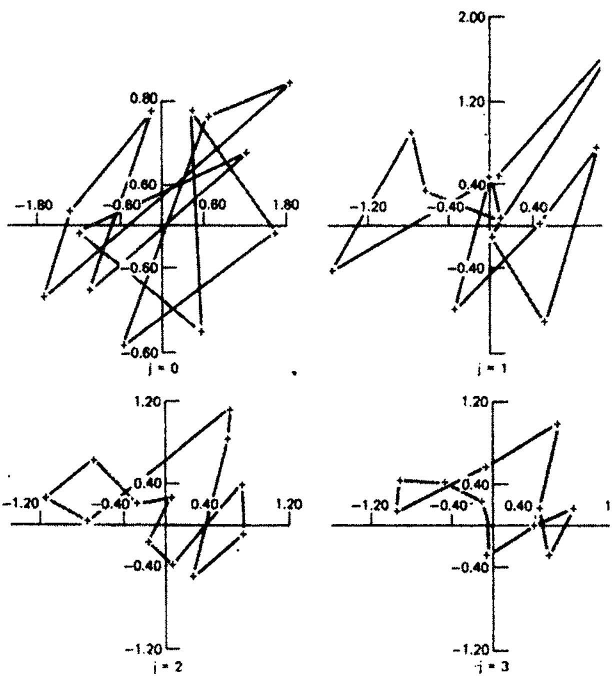
b) O teorema dos números primos: a sucessão dos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., parece prosseguir de forma caótica. Se,

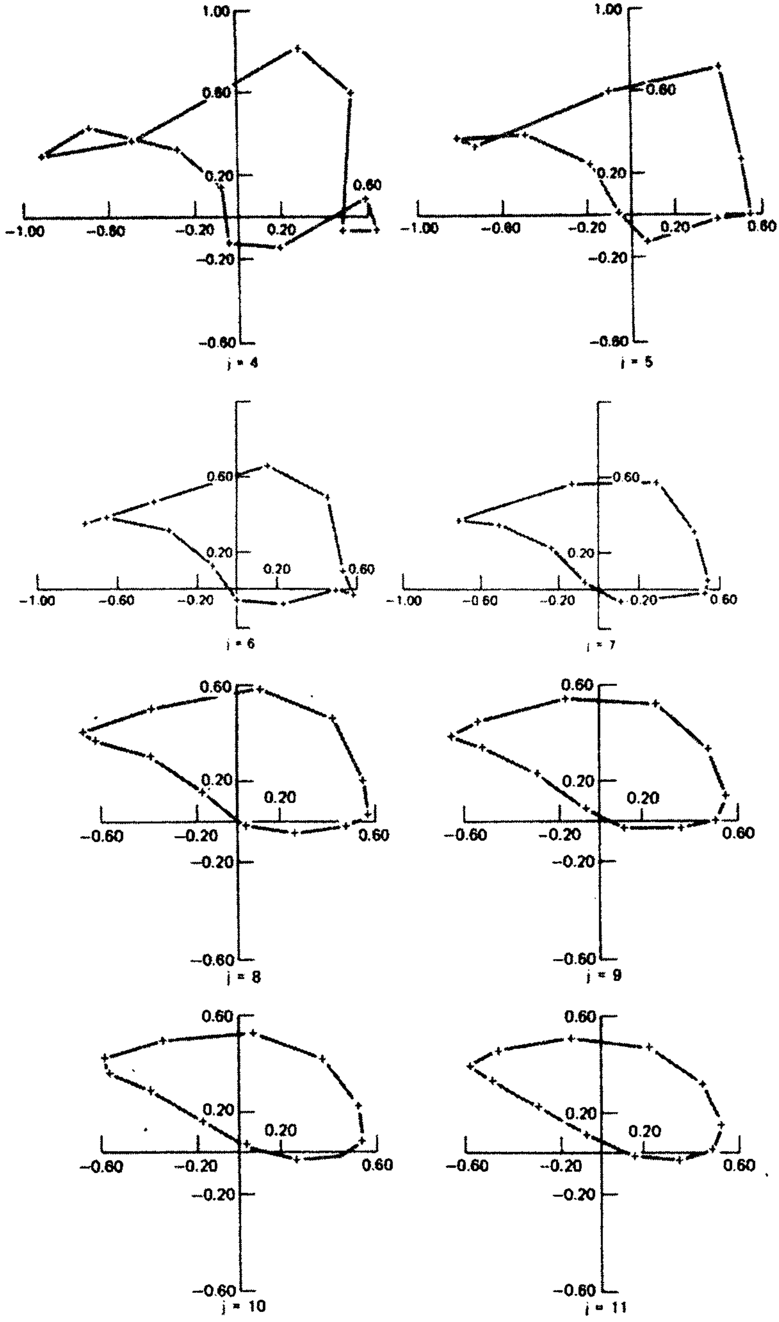
porém, designarmos por $\pi(x)$ o número de primos menores ou iguais a x, sabemos que $\lim_{x\to\infty} \pi(x) \div \frac{x}{\log(x)} = 1$. Ou seja, p($x$) é aproximadamente igual a $\frac{x}{\log(x)}$ quando x é grande. *Por exemplo,* quando $x = 1\ 000\ 000\ 000$, sabemos que $\pi(x) = 50\ 847\ 478$. Ora $\frac{10^9}{\log\ 10^9} = 48\ 259\ 942\ 43$... A função

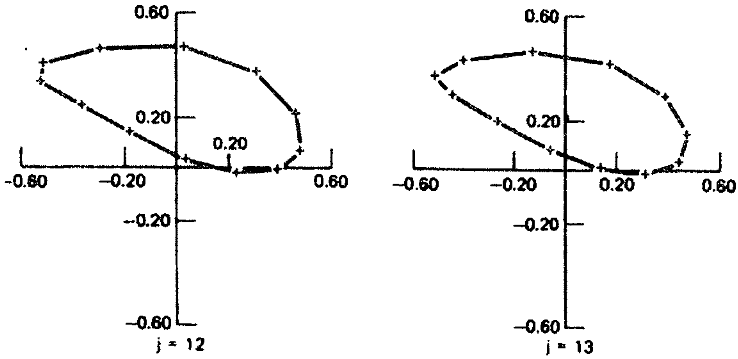
$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log\ u}$$

é uma aproximação ainda melhor (v. cap. 5, «O teorema dos números primos»).

c) Transforma-se um polígono cujos vértices são aleatórios num outro polígono definido pelos pontos médios das suas arestas. Como resultado da iteração desta transformação surge quase sempre uma figura convexa semelhante a uma elipse (de P. J. Davis, *Circulant Matrices*).




j = 4
j = 5
j = 6
j = 7
j = 8
j = 9
j = 10
j = 11



d) A ordem nem sempre surge facilmente do caos. Segundo uma conjectura avançada inicialmente por Goldbach (1690-1764) e que até agora (1979) ainda ninguém conseguiu demonstrar, qualquer número par é a soma de dois números primos. Por exemplo, 24 = 5 + 19. Podem existir várias somas: 24 = 7 + 17 = 11 + 13. A listagem que se segue foi feita por computador e mostra a decomposição de cada número par numa soma de dois números primos em que a primeira parcela é a menor e a segunda a maior. É evidente o caos. Mas qual será a regularidade subjacente? A demonstração da conjectura de Goldbach, se e quando nos chegar às mãos, poderá apontar alguma ordem neste caos:

EXEMPLIFICAÇÃO DA CONJECTURA DE GOLDBACH

4 = 2 + 2	20882 = 3 + 20879
6 = 3 + 3	20884 = 5 + 20879
8 = 3 + 5	20886 = 7 + 20879
10 = 3 + 7	20888 = 31 + 20857
12 = 5 + 7	20890 = 3 + 20887
14 = 3 + 11	20892 = 5 + 20887
16 = 3 + 13	20894 = 7 + 20887
18 = 5 + 13	20896 = 17 + 20879
20 = 3 + 17	20898 = 11 + 20887
22 = 3 + 19	20900 = 3 + 20897
24 = 5 + 19	20902 = 3 + 20899
26 = 3 + 23	20904 = 5 + 20899
28 = 5 + 23	20906 = 3 + 20903
30 = 7 + 23	20908 = 5 + 20903
32 = 3 + 29	20910 = 7 + 20903
34 = 3 + 31	20912 = 13 + 20899

36 = 5 + 31
38 = 7 + 31
40 = 3 + 37
42 = 5 + 37
44 = 3 + 41
46 = 3 + 43
48 = 5 + 43
50 = 3 + 47
52 = 5 + 47
54 = 7 + 47
56 = 3 + 53
58 = 5 + 53
60 = 7 + 53
62 = 3 + 59
64 = 3 + 61
66 = 5 + 61
68 = 7 + 61
70 = 3 + 67
72 = 5 + 67
74 = 3 + 71
76 = 3 + 73
78 = 5 + 73
80 = 7 + 73
82 = 3 + 79
84 = 5 + 79
86 = 3 + 83
88 = 5 + 83
90 = 7 + 83
92 = 3 + 89
94 = 5 + 89
96 = 7 + 89
98 = 19 + 79
100 = 3 + 97
102 = 5 + 97
104 = 3 + 101
106 = 3 + 103
108 = 5 + 103
110 = 3 + 107
112 = 3 + 109
114 = 5 + 109
116 = 3 + 113

20914 = 11 + 20903
20916 = 13 + 20903
20918 = 19 + 20899
20920 = 17 + 20903
20922 = 19 + 20903
20924 = 3 + 20921
20926 = 5 + 20921
20928 = 7 + 20921
20930 = 31 + 20899
20932 = 3 + 20929
20934 = 5 + 20929
20936 = 7 + 20929
20938 = 17 + 20921
20940 = 11 + 20929
20942 = 3 + 20939
20944 = 5 + 20939
20946 = 7 + 20939
20948 = 19 + 20929
20950 = 3 + 20947
20952 = 5 + 20947
20954 = 7 + 20947
20956 = 17 + 20939
20958 = 11 + 20947
20960 = 13 + 20947
20962 = 3 + 20959
20964 = 5 + 20959
20966 = 3 + 20963
20968 = 5 + 20963
20970 = 7 + 20963
20972 = 13 + 20959
20974 = 11 + 20963
20976 = 13 + 20963
20978 = 19 + 20959
20980 = 17 + 20963
20982 = 19 + 20963
20984 = 3 + 20981
20986 = 3 + 20983
20988 = 5 + 20983
20990 = 7 + 20983
20992 = 11 + 20981
20994 = 11 + 20983
20996 = 13 + 20983
20998 = 17 + 20981
21000 = 17 + 20983

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

L. A. Steen [1975].

Matemática algorítmica e matemática dialéctica

Vamos utilizar um exemplo para mostrarmos a diferença de pontos de vista entre a matemática algorítmica e a dialéctica. Admitamos então que havíamos decidido encontrar uma solução para a equação $x^2 = 2$. Os Babilónicos encontraram para este problema, por volta de 1700 a. C., a excelente aproximação de $\sqrt{2} = 1\,;\,24,\,51,\,10$ na sua notação de base 60, o que dá $\sqrt{2} = 1{,}414212963$ em notação decimal. Foi também este o problema para o qual Pitágoras (550 a. C.) mostrou não ser possível encontrar soluções fraccionárias e pelo qual se diz que ofereceu em sacrifício uma enorme quantidade de bois — o problema que originou a crise existencial na matemática grega clássica: $\sqrt{2}$ existe (enquanto diagonal do quadrado de lado unitário); porém, não existe (enquanto fracção)! Apresentamos de seguida duas soluções para este problema.

Solução I: observemos que, se o número x for a solução para $x^2 = 2$, então seguir-se-á que $x = 2/x$. Ora, se x for uma estimativa ligeiramente errada, digamos, por defeito, então $2/x$ será uma estimativa incorrecta por excesso. Pensando um pouco, é fácil concluir que a média entre a estimativa que temos por defeito e a que temos por excesso será melhor do que ambas. Formalizando, seja x_1, x_2, ..., uma sucessão de números definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),\; n = 1,\, 2,\, \ldots$$

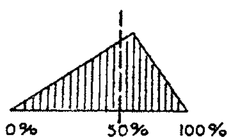
Sendo x_1 qualquer número positivo, a sucessão x_1, x_2, ..., converge quadraticamente para $\sqrt{2}$.

Começamos com $x_1 = 1$, por exemplo. Então os valores da sucessão são $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 1{,}416666...$; $x_4 = 1{,}414215686...$ O valor de x_4 está já correcto até à quinta casa decimal. A convergência quadrática significa que o número de casas decimais correctas duplica com cada iteração. Temos aqui uma receita ou um algoritmo, como solução para o nosso problema. Para executar este algoritmo, necessitamos apenas de efectuar somas e divisões, dispensando uma teoria completa dos números reais.

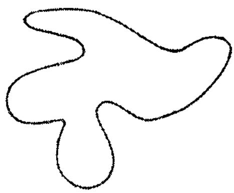
Solução II: consideremos o gráfico da função $y = x^2 - 2$. O gráfico é, na verdade, uma parábola, mas isso pouco importa. Se $x = 1$, então $y = -1$. Se $x = 2$, então $y = 2$. À medida que x varia continuamente entre 1 e 2, y varia continuamente de um valor negativo para um valor positivo. Consequentemente, existe um valor de x entre 1 e 2 para o qual $y = 0$, ou, o que é equivalente, $x^2 = 2$. O problema está resolvido. Os pormenores do raciocínio são supridos pelas propriedades do sistema de números reais e das funções contínuas definidas nesse sistema.

A solução I é matemática de tipo algorítmico. A solução II é a solução dialéctica. Num certo sentido, nem a solução I nem a solução II resolvem de facto o problema. A solução I indica-nos aproximações cada vez melhores, mas nunca possuímos uma solução exacta de cada vez que paramos. A solução II garante-nos que «existe» uma solução exacta. Diz-nos que essa solução se encontra entre 1 e 2 e mais não adianta. À solução dialéctica bem poderíamos chamar solução existencial.

A dialéctica proporciona compreensão e liberdade. O nosso conhecimento sobre o que existe pode estender-se muito para além daquilo que somos capazes de calcular ou de aproximar. Eis um exemplo simples de como isso sucede: é-nos dado um triângulo com três lados diferentes. Levanta-se a questão de saber se existe uma linha vertical que divida ao meio a área do triângulo. Em matemática algorítmica poder-se-ia tentar resolver o problema de achar uma tal linha usando régua e compasso, ou outros meios mais potentes. Com a matemática dialéctica podemos sem qualquer esforço responder que sim, que uma linha nessas condições existe. Basta notar que, ao deslocar continuamente da esquerda para a direita uma faca sobre a figura, a fracção da área que está à esquerda do gume varia continuamente desde 0% até 100% e que, portanto, deverá existir uma posição intermédia para a qual essa fracção seja exactamente 50%:



Chegados a esta solução, apercebemo-nos, com algum espanto, de que nem sequer utilizámos qualquer das propriedades específicas do triângulo; o mesmo raciocínio serviria para qualquer área! Podemos, assim, enunciar a existência de uma linha vertical que divide em partes iguais qualquer figura, mesmo sem sabermos como encontrar essa linha, sem sabermos como calcular a área dividida pelo corte e, de qualquer forma, sem necessidade de o fazermos. (Retomaremos esta ideia no capítulo 6, «A crise clássica da compreensão e pedagogia na sala de aula».)



Toda a matemática do Egipto, da Babilónia e do Médio Oriente antigo era de natureza algorítmica. A matemática dialéctica — estritamente lógica e dedutiva — tem origem na Grécia. Mas não substituiu a matemática algorítmica. Com Euclides, o papel da dialéctica é justificar uma construção — ou seja, um algoritmo.

Só mais recentemente encontramos matemática com pouco ou nenhum conteúdo algorítmico e que podemos designar por puramente dialéctica ou existencial.

Uma das primeiras linhas de investigação a revelar um espírito predominantemente dialéctico foi a pesquisa das raízes de um polinómio de grau n. Já há muito se suspeitava de que um polinómio de grau n, $p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, deveria possuir n raízes, contando com as multiplicidades. Todavia, não se encontrara uma fórmula explícita, como a fórmula quadrática ou cúbica. (Foi posteriormente demonstrado que não é possível encontrar uma fórmula semelhante para $n > 4$.) A questão passou então a ser a de descobrir que outros meios poderiam aplicar-se ao problema de encontrar aproximações às raízes. Em última análise, que garantias temos da existência dessas raízes? Os teoremas que o garantem, demonstrados inicialmente por Gauss, são dialécticos. O aspecto algorítmico é ainda tema de discussão.

Na maior parte do século XX a matemática tem sido orientada para a existência, e não para o algoritmo. Tem-se notado em anos mais recentes uma viragem em direcção à abordagem construtiva ou algorítmica.

Henrici observa:

> A *matemática dialéctica* é uma ciência estritamente lógica, em que as afirmações ou são verdadeiras ou são falsas e em que objectos com as características especificadas ou existem ou não existem. A *matemática algorítmica* é uma ferramenta para resolver problemas. Preocupamo-nos aí não apenas com a existência de um objecto matemático, mas também com as credenciais da sua existência. A *matemática dialéctica* é um jogo intelectual que se rege por regras acerca das quais o consenso é quase geral. As regras da matemática *algorítmica* podem variar consoante a urgência que haja em resolver o problema. Nunca teríamos levado um homem à Lua se tivéssemos insistido em que todas as trajectórias fossem calculadas com

rigor dialéctico. As regras podem também variar consoante o equipamento de cálculo de que se dispõe. A matemática *dialéctica* é propícia à contemplação. A matemática *algorítmica* é propícia à acção. A matemática *dialéctica* gera entendimento. A matemática *algorítmica* gera resultados.

Existe uma clara diferença de paradigmas entre o algorítmico e o dialéctico; quem tenha trabalhado sob um desses pontos de vista pode sentir que as soluções encontradas sob o outro não são «lícitas» ou «admissíveis». Sentirá o choque dos paradigmas. P. Gordan, que trabalhou algoritmicamente na teoria das invariantes, sentiu este choque ao ser confrontado com a brilhante obra de Hilbert, que trabalhava dialecticamente. «Isto não é matemática», afirmou Gordan, «é teologia.»

É certo que a abordagem algorítmica é recomendável sempre que o problema com que nos defrontamos exija uma solução numérica, com importância dentro ou fora da matemática. A análise numérica é a ciência e a arte de chegar a soluções numéricas para certos problemas matemáticos. Algumas autoridades alegam que a «arte» da análise numérica mais não faz do que esconder todas as desadequações da «ciência». A análise numérica é, ao mesmo tempo, um ramo da matemática e da ciência da computação.

Consideremos, então, um problema característico. Certa situação (em física, digamos) conduziu-nos a um sistema de equações diferenciais para as variáveis $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_n(t)$, em que a variável independente t toma valores entre $t = 0$ até $t = 1$. Pretendemos resolver este sistema na condição de os valores das incógnitas $u_i(t)$ em $t = 0$ e $t = 1$ serem predeterminados. Denomina-se este problema por problema de valores na fronteira. Uma análise informal revelou que, provavelmente, não existe nenhuma solução explícita elementar que resolva o problema, pelo que se decidiu avançar numericamente e calcular uma tabela de valores, $u_i(t_j)$ $j = 1, 2, ..., p$, $i = 1, 2, ..., n$, que se aceitará como solução. A análise numérica diz-nos como devemos proceder.

A escolha do método mais indicado poderá depender dos meios de cálculo mecânicos à nossa disposição. Se utilizamos papel e lápis, e talvez uma calculadora, devemos seguir uma determinada direcção. Tendo acesso a um grande computador, poderão existir outros caminhos mais convenientes. Se o computador tem certas características de memória ou de programação ou se está equipado com um dado *software*, isso poderá sugerir ainda outras vias mais económicas.

Faz-se o cálculo com o computador digital substituindo as variáveis contínuas $u_i(t)$ por variáveis discretas. Ainda assim, isso pode ser feito de diversas formas. Devemos substituir a equação diferencial por uma equa-

ção de diferenças? Se sim, isso também poderá ser conseguido de muitas maneiras. Como escolher então uma abordagem adequada? Se adoptarmos a estratégia das diferenças finitas, seremos conduzidos a um sistema de equações algébricas que poderão ou não ser lineares, dependendo da equação que deu origem ao problema.

Como hão-de resolver-se estas equações? Serão aplicáveis métodos directos? Ou devemos cingir-nos às aproximações sucessivas dos métodos iterativos? Deparamo-nos com uma escolha entre muitos métodos diferentes. E a análise numérica terá algo a dizer acerca de cada um. A esses métodos de proceder é comum chamar «algoritmos».

Uma vez obtida uma solução para o problema por meio de um algoritmo, a análise numérica tenta encontrar um limite superior para a diferença entre essa resposta e a solução exacta, que não se conhece. Excluindo a hipótese de qualquer erro crasso* (ou seja, avarias no computador, erros de programação ou outros erros humanos), as inexactidões surgirão porque se discretizaram variáveis contínuas, se tornaram finitas ou foram truncadas expressões e processos matemáticos infinitos, porque a máquina de cálculo não efectua operações com precisão infinita, mas apenas com, por exemplo, oito casas decimais. A análise numérica tenta fazer um estudo dos erros para cada algoritmo. Fazer esses estudos apresenta dificuldades importantes, podendo os limites obtidos, quando é possível obtê-los, ser ou determinísticos ou estatísticos. Podem ser limites *a priori* ou *a posteriori*, ou seja, limites que podem ser calculados antes do cálculo principal ou que exijam a execução prévia de todo o cálculo. Poderão ser limites apenas aproximados ou limites assimptóticos. Poderão, finalmente, ser limites calculados pelo próprio computador.

Como parte da análise do erro, deve até considerar-se em análise numérica como decidir se uma resposta é boa. Qual o critério utilizado para decidir se uma resposta é boa? Poderão existir vários. Para dar um exemplo muito simples, suponhamos que pretendemos resolver uma única equação $f(x) = 0$ e que x^* é a resposta matematicamente correcta. Obtivemos uma resposta $\bar{x}$ por meio de um cálculo numérico. Será que $\bar{x}$ é uma boa resposta se $|x^* - \bar{x}|$ for pequeno? Ou será uma boa resposta se $f(\bar{x})$ for aproximadamente zero? Tendo em atenção que, provavelmente, não conseguimos calcular f, mas apenas uma aproximação $\bar{f}$, devemos talvez afirmar que $\bar{x}$ será uma boa resposta se $\bar{f}(\bar{x})$ for aproximadamente nulo? Critérios diferentes podem levar a respostas bastante diferentes.

* Estes erros não podem ser esquecidos levianamente. Ocorrem com frequência suficiente para que o analista aprenda a reconhecê-los e a tomar as providências adequadas.

Uma vez obtida uma solução razoável para o nosso problema, pode interessar-nos melhorar essa resposta. Será possível obter respostas cada vez mais precisas por aplicação de um certo tipo fixo de algoritmo? A análise numérica dá-nos informação sobre isso, e a teoria daí resultante, conhecida por teoria da convergência, é um dos aspectos centrais dessa disciplina.

Como se viu, uma análise numérica abarca a escolha de uma estratégia de cálculo e a avaliação dos resultados obtidos. Uma análise numérica completa para um problema (infelizmente, raras vezes possível) seria constituída por:

1) A definição de algoritmos.
2) Análise de erros, incluindo erros de truncagem e de arredondamento.
3) Estudo da convergência, incluindo a taxa de convergência.
4) Comparação entre os algoritmos, de modo a averiguar a utilidade relativa de cada um dos diferentes algoritmos em diversas circunstâncias.

O espírito puramente algorítmico ficaria satisfeito apenas com os passos 1 e 4 — inventar algoritmos, testá-los em problemas comuns e verificar o seu funcionamento.

Ao pedirmos análises de erros cuidadosas, demonstrações de convergência e cálculos da taxa de convergência, prestamos um tributo ao ponto de vista dialéctico.

A atitude algorítmica não nega forçosamente a dialéctica, mas recusa-se a subordinar-se-lhe. Ou seja, utilizar-se-á um bom algoritmo, mesmo que a única razão para confiar nesse algoritmo seja a experiência computacional, e não a demonstração rigorosa.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

P. J. Davies [1969]; P. Henrici [1972], [1974]; J. F. Traub.

A tendência para a generalização e para a abstracção. O teorema chinês dos restos: um estudo de caso

Nesta secção apresentamos alguns marcos especialmente salientes na história de um teorema simples da aritmética que é conhecido desde há pelo menos 2000 anos. Colocaremos em evidência a evolução do seu

enunciado ao longo de milénios e deixaremos de lado as interessantes questões acerca da prioridade histórica, das influências, da demonstração e das aplicações.

Encontrei pela primeira vez o teorema chinês dos restos, tinha 10 anos, no livro *Mathematical Recreations and Essays*, de W. W. Rouse Ball. Esse livro, fácil de ler e repleto de valiosas preciosidades matemáticas, influenciou três ou quatro gerações de jovens matemáticos. Na p. 6 da 11.ª ed. lê-se:

> Pede a qualquer pessoa que escolha um número menor do que 60. Pede-lhe depois para efectuar as seguintes operações: (*i*) dividir o número por três e indicar o resto dessa divisão, a que chamaremos *A;* (*ii*) dividir o número por quatro e indicar o resto, a que chamaremos *B;* (*iii*) dividir o número por cinco e indicar o resto, a que chamaremos *C.* Podemos então saber qual foi o número escolhido dividindo $40a + 45b + 36c$ por 60.

Seguia-se uma generalização e uma demonstração algébrica que, na altura, não entendi.

1. O enunciado mais antigo que se conhece deste teorema parece ser o que consta do *Sun Tzu Suan-ching* (a clássica obra matemática de Sun Tzu) que data de entre 280 e 473:

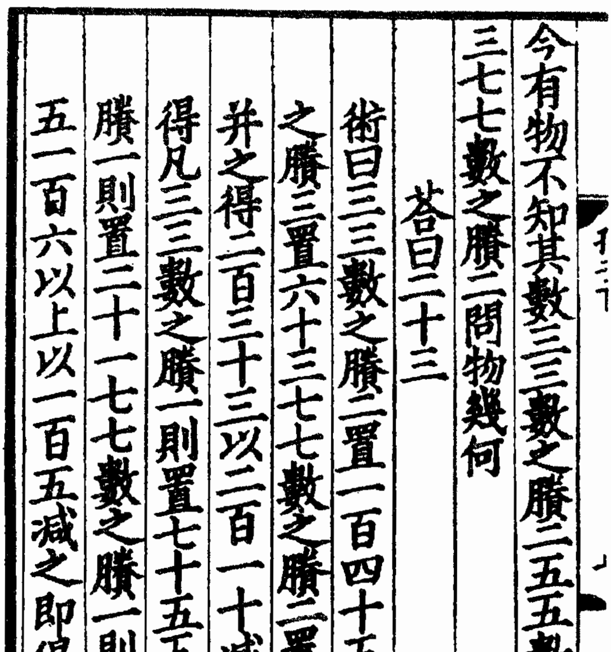
> Temos coisas das quais não conhecemos o número; se as contarmos em grupos de três, o resto será dois; se as contarmos em grupos de cinco, o resto será três; se as contarmos em grupos de sete, o resto será dois. Quantas coisas tínhamos? Resposta: 23. Método:
>
> - Se as contar em grupos de três e o resto for dois, junte 140.
> - Se as contar em grupos de cinco e o resto for três, junte 63.
> - Se as contar em grupos de sete e o resto for dois, junte 30.
> - Some estes (números) e terá 233.
> - A esse número subtraia 210 e obterá a resposta.
> - Por cada unidade que reste, contando em grupos de três, junte 70.
> - Por cada unidade que reste, contando em grupos de cinco, junte 21.
> - Por cada unidade que reste, contando em grupos de sete, junte 15.
> - Se (a soma) for 106 ou mais, subtraia 105 e obterá a resposta.

2. O auge da matemática chinesa clássica é o *Shu-shu Chiu-chang* de Ch'in Chiu-shao. Neste livro, cujo título significa «tratado matemático em nove secções» e que foi publicado em 1247, encontra-se uma extensa abordagem ao problema do resto. O texto relevante consiste em trinta e sete instruções algorítmicas (a regra Ta-Yen) e ocupa cinco páginas em Libbrecht. Embora de grande importância histórica, passamos de seguida às formulações ocidentais.

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
c. 1180-1250

3. Eis o teorema chinês dos restos nas mãos de Leonardo Pisano (Fibonacci). No seu *Liber Abaci* (1202), Fibonacci escreve:

> Tome um determinado número e divida por três, e também por cinco, e também por sete; pergunte-se de cada vez o que resta de cada divisão. Por cada unidade que reste da divisão por três, guarde 70; por cada unidade que reste da divisão por cinco, guarde 21; por cada unidade que reste da divisão por sete, guarde 15. E, sempre que esse número ultrapassar 105, sutraia-lhe 105. E o que restar será o número inicial. Exemplo: suponha que da divisão por três o resto é dois; por isso, guarde duas vezes 70, ou 140; se daí subtrair 105,



今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
并之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

O conhecido problema de Sun Tzu, o exemplo mais antigo do teorema do restos que conhecemos (extraído de Sun Tzu suan-ching*)*

restam 35. Da divisão por cinco, o resto será três; guarde três vezes 21, ou, 63, que somará aos 35 de cima; ficam 98; da divisão por sete, o resto será quatro; assim, guarde quatro vezes 15, ou 60, que somará aos 98 acima, resultando 158; se daí subtrair 105, o resto será 53, que é o número inicial.

Desta regra resulta um jogo agradável, sobretudo se a ensinar a alguém; se uma terceira pessoa disser em segredo um número qualquer ao seu companheiro, este, sem ser interrogado, dividirá em silêncio o número por três, cinco e sete segundo a regra que apresentámos acima; dir-lhe-á então os restos das divisões por ordem; poderá, assim, dizer-lhe qual o número que lhe foi dado em segredo.

4. Segue-se o mesmo teorema nas mãos de Leonhard Euler [*Comentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae**, 7 (1734-1735)]:

Há que achar um número que, dividido por a, b, c, d e e, que suponho primos entre si, deixe como resto p, q, r, s, t. As soluções para este problema são os números

$$Ap + Bq + Cr + Ds + Et + m \times abcde$$

em que A é um número que não deixa resto quando dividido por $bcde$, mas deixa resto 1 quando dividido por a; B é um número que dividido por $acde$ não deixa resto, mas por b deixa resto 1..., números que podem achar-se seguindo a regra indicada para dois divisores.

5. O teorema chinês dos restos tal como consta de *Introduction to Number Theory*, de J. E. Shockley, 1967:

Teorema: suponhamos que $m_1, m_2, ..., m_n$ são relativamente primos dois a dois. Seja $M = m_1, ... m_n$. Definimos as quantidades $b_1, b_2, ..., b_n$ escolhendo $y = b_j$ como solução para

$$y\frac{M}{m_j} \equiv 1 \text{ mod}(m_j) \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

Então a solução geral do sistema

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1(\text{mod } m_1) \\ x &\equiv a_2(\text{mod } m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n(\text{mod } m_n) \end{aligned}$$

* Hoje Leninegrado (novamente Sampetersburgo). *(N. do T.)*

é dada por $x \equiv a_1 b_1 \dfrac{M}{m_1} + \ldots + a_n b_n \dfrac{M}{m_n} (\operatorname{mod} M).$

6. O teorema chinês dos restos apresentado por um cientista da computação contemporâneo (R. E. Prather, 1976):

Sendo $n = p_i^{\alpha i}\, p_2^{\alpha 2} \ldots\, p_r^{\alpha r}$ a decomposição do inteiro n em potências primas distintas, $p_i^{\alpha i} = q_i$, então o grupo cíclico Z_n admite a representação do produto

$$Z_n \cong Z_{q1} \times Z_{q2} \times \ldots \times Z_{qr}$$

7. O último exemplo é-nos dado por E. Weiss em *Algebraic Number Theory* (1963):

Axioma IIb: sendo $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ um subconjunto finito de $\mathscr{L}$, então para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_r \in F$ e quaisquer inteiros $m_1, m_2, \ldots, m_r$ existe um elemento $a \in F$ tal que

$$\begin{array}{ll} v_{P_i}(a - a_i) \geq m_i & i = 1, \ldots, r \\ v_{P_i}(a) \geq 0 & P \notin S,\ P \in \mathscr{L} \end{array}$$

Somos também convidados a considerar «*OAF{Q, $\mathscr{L}$}* tal como é descrito em (4–1–2). Traduzindo para a linguagem das congruências, nota-se que os nossos axiomas se transformam em enunciados bem conhecidos. Em particular, o axioma IIb é precisamente o teorema chinês dos restos.»

Tecemos seguidamente alguns comentários a estas exposições.

1. *Sun Tzu:* aquilo que hoje mais nos impressiona é que a apresentação é específica e algorítmica. O autor parte dos restos 2, 3, 2 e chega à solução para esse caso particular. Até às palavras «a esse número subtraia 210 e obterá a resposta», o leitor moderno fica na dúvida sobre qual será o método geral ou mesmo se não se tratará de mera coincidência aritmética. Esse mesmo leitor ficará certamente mais animado com a palavra *método,* mais promissora. A segunda parte, com início em «por cada unidade...», revela o método geral, do qual a primeira parte é apenas um caso especial, esclarecendo-a por completo.

Toda a formulação é aritmética. Ainda restam alguns mistérios por resolver. Donde surgem os números mágicos 70, 21, 15 e 105? E, se não contarmos em grupos de três, cinco e sete, mas sim em grupos de três, quatro e cinco, ou mesmo em qualquer outro grupo de inteiros? Que sucederá então?

2. (Sem comentários.)

3. A formulação de Fibonacci não está muito distante da de Sun Tzu. É ainda aritmética e depende de um conjunto especial de divisores. O aspecto lúdico do problema é um toque agradável e persistiu durante anos na literatura recreativa. Note-se que uma das implicações dessa abordagem lúdica (e que não é tão óbvia na apresentação de Sun Tzu) é que o mágico consegue sempre descobrir a resposta, quaisquer que sejam os restos. A questão da não-unicidade da resposta não é abordada nem por Fibonacci nem por Sun Tzu, mas ambos parecem sugerir que pode ignorar-se a possibilidade de a resposta não ser única.

4. A apresentação feita por Euler, quinhentos anos mais tarde, chega-nos de um mundo simbólico. Os inteiros específicos são generalizados para quantidades indeterminadas ou arbitrárias *a, b, ..., t.* A notação algébrica moderna está solidamente estabelecida e são apresentadas todas as soluções para o problema. Embora tornado explícito para cinco divisores, o método é, por extensão, completamente geral. A última frase refere-se a um resultado anterior para o cálculo das congruências necessárias para achar as constantes *A, ..., E.*

5. Podemos ver a apresentação de Shockley como uma actualização do que fora já avançado nas *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801). A notação gaussiana para congruências está já perfeitamente estabelecida e permite um nível de elegância até então impensável. A representação final e os problemas auxiliares que é necessário resolver para obter as constantes «Ta-yen» são expressos com sobriedade. Pode dizer-se que esta formulação é um dos pontos altos da teoria algébrica clássica dos números.

6. Sente-se uma intensa mudança de tom entre esta formulação e a anterior. Deparamos aqui com o teorema totalmente reescrito sob a influência da uma concepção estruturalista da matemática.

O conjunto finito de inteiros 0, 1, 2, ..., $n-1$, munido da operação de adição mod n (ou seja, ignorando diferenças de múltiplos de n) constitui aquilo a que se chama um grupo aditivo cíclico, que se designa por Z_n (v. capítulo 5, «Teoria de grupos»). Por exemplo, Z_4 é o conjunto dos inteiros 0, 1, 2, 3 juntamente com a seguinte tabela de adição:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

O produto directo de dois desses grupos, Z_3 e Z_4, por exemplo, consiste em pares de inteiros (a, b), o primeiro dos quais é um elemento de Z_4, pertencendo o segundo a Z_3. Os elementos de $Z_4 \times Z_3$ são, portanto, os doze pares

(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)

Define-se a adição de elementos de $Z_4 \times Z_3$ como a adição dos inteiros correspondentes, de forma que a primeira adição seja efectuada pelo módulo 4 e a segunda pelo módulo 3. Assim, por exemplo:

$$(2, 2) + (3, 2) = [(2 + 3)\text{mod } 4, (2 + 2)\text{mod } 3] = (1, 1)$$

Ora, é possível identificar cada um destes pares com o único número dentro do conjunto 0, 1, ..., 11 que deixa resto a quando dividido por 4 e resto b quando dividido por 3. Aplicando essa identificação à tabela dada acima, obtém-se

0	9	6	3
4	1	10	7
8	5	2	11

Por exemplo, $(1, 1) = (2, 2) + (3, 2) \to 1 = (2 + 11) \text{ mod } 12$, o que constitui um caso especial do isomorfismo que se verifica entre as duas tabelas para cada uma das definições separadas de +.

Esta formulação do teorema dos restos afirma que este estratagema funciona para qualquer n, desde que decomposto nas suas potências de primos.

Note-se que este enunciado do teorema dos restos dá-nos ao mesmo tempo mais e menos do que a versão anterior. Coloca em evidência a estrutura em detrimento do algoritmo. Oferece-nos um análise completa da adição modular (Z_n) em termos de adições mais simples (Z_{q_r}). Evita a questão de como conseguir a identificação de Z_n com $Z_{q1} \times \ldots \times Z_{q_r}$ (embora essa identificação surja no decurso da demonstração do teorema) e ignora de todo a motivação histórica de como, dados os restos, poderá prontamente calcular-se o número que dá origem a esses restos.

Num certo sentido, este facto é surpreendente, especialmente se se atender ao comentário que Prather realiza no fim da sua exposição e segundo o qual o teorema chinês dos restos se tem revelado útil na concepção de unidades aritméticas mais rápidas para computadores digitais. Poder-se-ia pensar que, para isso, é necessário conhecer um algoritmo concreto. Mas, por outro lado, também é verdade que em ciência da computação teórica predomina um espírito de abstracção que supera em fanatismo o de qualquer outro ramo da matemática.

7. Trata-se aqui de aritmética, não com inteiros, mas com corpos arbitrários. A este nível de generalização, o enunciado é de tal forma hermético, que o comum dos matemáticos profissionais será, provavelmente, incapaz de o compreender de imediato. O seu significado distanciou-se da nossa reserva de experiência comum, sendo a afirmação compreensível apenas por um auditório muito restrito e especializado.

Ainda que sigamos o conselho do autor e pensemos fazer a «tradução para a linguagem das congruências», deparam-se-nos algumas dificuldades. Tentemos traduzir aplicando o velho truque do dicionário e seguindo de entrada em entrada até chegarmos a definições mais simples. Aquilo que devemos recear não é encontrar definições circulares — a matemática impede que isso suceda —, mas sim chegar a alguma proposição geral que não possamos firmar em qualquer experiência pessoal intuitiva ou operacional.

Começemos por considerar o *OAF{Q, $\mathscr{L}$}*. Ficamos a saber que um *OAF* (*ordinary arithmetic field*)* é um «par *{F, S}* em que *F* é um corpo e *S* é uma colecção não vazia de divisores primos discretos de *F* que satisfaz os seguintes axiomas: I [...] II [...]». Ora, o conceito de corpo é daqueles que pertencem ao vocabulário comum de qualquer matemático instruído. Um corpo é, em poucas palavras, qualquer sistema de objectos que possam ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos entre si, de acordo com as regras normais da aritmética. Pelo contrário, o conceito de divisor primo de um corpo não é uma dessas noções simples. Consultando uma secção anterior do livro, ficamos a saber que os divisores primos de um corpo *F* são os conjuntos de classes de equivalência de valorações em *F* pela relação de se considerarem equivalentes duas valorações se definirem a mesma topologia em *F*. Consultando a primeira página do livro de Weiss, ficamos então a saber que uma valoração sobre um corpo é uma função que o aplica sobre os números reais não negativos e que satisfaz três axiomas, constituindo uma generalização de valor absoluto. Dada a extrema penúria de exemplos apresentados no texto;

* Corpo aritmético vulgar. *(N. do R.)*

rapidamente se torna evidente, mesmo a um profissional, que a revelação se dará apenas depois de muita reflexão e ponderação e que, mesmo após longas horas de estudo, a simples fraseologia do teorema chinês dos restos poderá parecer mais distante do que nunca.

A escassez de exemplos leva também o não-especialista a perguntar-se se existirão de facto outros exemplos interessantes do teorema chinês dos restos além do que se encontra nos inteiros naturais. Se existem, quais são? Ou será que grande parte desta teoria não passa de pedantismo vazio?

O professor John Wermer conta a história de como, quando ainda não era licenciado, frequentou uma cadeira de Geometria Projectiva com Oskar Zariski, uma das grandes figuras no campo da geometria algébrica. A cadeira de Zariski era extraordinariamente abstracta, e Wermer, na altura jovem estudante, carecia por vezes de esclarecimento. «Que aconteceria», perguntou ao professor, «se se admitisse o caso particular de o corpo F ser o dos números complexos?» Resposta de Zariski: «Basta tomar para F o corpo dos números complexos.»

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

M. J. Crowe; L. E. Dickson; U. Libbrecht; R. E. Prather; W. W. Rouse Ball; J. E. Shockley; E. Weiss; R. L. Wilder [1986].

A matemática como enigma

O caminho estreito e delicado do cálculo formal leva-nos muitas vezes directamente contra um muro de mistério. Tome-se como exemplo a fórmula resolvente de Cardano para a equação cúbica. Girolamo Cardano publicou essa fórmula em 1545 no seu *Ars Magna,* indicando a solução para a equação cúbica

$$x^3 + mx = n$$

Girolamo Cardano
1501-1576

A fórmula de Cardano, provavelmente o primeiro grande progresso em álgebra desde o tempo dos Babilónios, foi considerada na época um grande avanço.

Apresentamos a exposição de Cardano numa sequência ligeiramente diferente.

Admitamos que t e u são dois números tais que se verifique simultaneamente

$$\begin{cases} t - u = n \\ tu = (m/3)^3 \end{cases} \tag{*}$$

Definamos agora x como

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u} = t^{1/3} - u^{1/3} \tag{**}$$

Elevando ambos os membros da equação ao cubo, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 &= (t^{1/3} - u^{1/3})^3 = t - 3t^{2/3}u^{1/3} + 3t^{1/3}u^{2/3} - u \\ &= (t-u) - (3t^{1/3}u^{1/3})(t^{1/3} - u^{1/3}) \\ &= n - mx \end{aligned}$$

Donde se conclui que (*) e (**) implicam que x satisfaz a equação cúbica

$$x^3 + mx = n \tag{***}$$

Ora, é possível resolver (*) para t e u em termos de n e de m. Pois $u = t - n$. Donde $t(t - n) = (m/3)^3$. O que nos conduz à equação quadrática $t^2 - nt - (m/3)^3 = 0$. Pela fórmula resolvente da equação quadrática, esta equação tem como solução

$$t = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4(m/3)^3}}{2} = \frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}$$

Donde

$$u = \frac{-n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}$$

Substituindo este resultado em (**), obtemos

$$\begin{aligned} x = &\left(\frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}\right)^{1/3} \\ &- \left(-\frac{n}{2} + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}\right)^{1/3} \end{aligned} \tag{****}$$

Esta é a famosa equação cúbica que se diz ter sido surripiada sob juramento de segredo por Cardano ao matemático Tartaglia.

Vejamos se funciona. Tomemos a equação $x^3 + x = 2$, que tem, obviamente, $x = 1$ como raiz. Para esta equação, $m = 1$ e $n = 2$, pelo que a fórmula de Cardano nos indica

$$x = \left(1 + \sqrt{1 + \tfrac{1}{27}}\right)^{1/3} - \left(-1 + \sqrt{1 + \tfrac{1}{27}}\right)^{1/3}$$

Uma calculadora diz-nos rapidamente que isso dá

$$x = 1{,}263762616 - 0{,}2637626158$$

o que dá $x = 1$ a menos de 2×10^{-10}. Nada mau!

Encorajados por este sucesso, tentamos novamente. Consideramos a equação $x^3 - 15x = 4$, que tem, obviamente, em $x = 4$ uma das suas raízes. A fórmula de Cardano dá

$$x = \left(2 + \sqrt{-121}\right)^{1/3} - \left(-2 + \sqrt{-121}\right)^{1/3}$$

Hummm! Mas que se passa aqui?

Há que atribuir um «significado» a $\sqrt{-121}$. Em particular, há que indicar como somar $\sqrt{-121}$ a um número real (2 ou −2 neste caso). Já não podemos recorrer tão facilmente à calculadora. Ponha-se agora o leitor no lugar de Cardano. Corre o ano de 1545. As raízes quadradas de números negativos não têm qualquer legitimidade; a teoria dos números complexos não existe. Como interpretar estes símbolos sem sentido?

O que se tem aqui é incompletude e enigma. As necessidades internas da matemática criam pressões para que se procurem explicações. Somos curiosos. Queremos compreender. A nossa metodologia conduziu-nos a um novo problema. Passariam ainda quase três séculos antes que surgisse uma teoria adequada para interpretar correctamente este trabalho e torná-lo legítimo.

A solução para este mistério foi finalmente apresentada por volta de 1800, interpretando os números complexos como pontos num plano coordenado cujo eixo horizontal é o eixo real e cujo eixo vertical é o eixo «imaginário».

Ao pensarmos na linha real como parte de um plano de números complexos, entramos num domínio matemático completamente novo. Todo o nosso anterior conhecimento de álgebra e de análise real se alarga e se enriquece quando reinterpretado no domínio complexo. Além disso,

vemos de imediato inúmeros novos problemas e questões que nem sequer poderiam ser levantados no contexto dos números reais.

Por meio da fórmula de Cardano, o algebrista abeira-se inadvertidamente de uma janela pela qual consegue um vislumbre desconcertante e maravilhoso de um mundo ainda por explorar.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

E. Borel; R. L. Wilder [1974].

Unicidade na diversidade

Em matemática, a unificação, o estabelecimento de uma relação entre objectos aparentemente distintos, é simultaneamente uma das grandes forças motivadoras e uma das grandes fontes de satisfação estética. Um exemplo maravilhoso de unificação é-nos proporcionado pela fórmula de Euler, que unifica as funções trigonométricas com as funções exponenciais. Tanto as razões trigonométricas como as sucessões de crescimento exponencial têm uma origem antiga. Recordemo-nos da lenda do sábio que queria o seu pagamento em grãos de trigo — um grão na primeira casa de um tabuleiro de xadrez, dois na segunda e o dobro em cada casa seguinte. Não há dúvida de que a sucessão 1, 2, 4, 8, 16, ..., é a mais antiga sucessão exponencial. Mas como podem estar relacionadas estas duas ideias?

O desenvolvimento e a fusão destes conceitos dariam um bom tema para um ensaio em história da matemática. Aí poderíamos ver o prolongamento do seno e do co-seno a funções periódicas, a escolha de e^x como exponencial elementar, em que e representaria o misterioso número transcendente 2,718281828459..., o desenvolvimento da teoria das séries de potências, a extensão corajosa, mas perfeitamente natural, das séries de potências a variáveis complexas, a dedução das três expansões em série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{5!} - \ \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \dots$$

das quais resultaria imediatamente a unificação final, a fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \text{ em que } i = \sqrt{-1}$$

A exponencial surgiria, assim, como trigonometria dissimulada. Inversamente, resolvendo em ordem às funções trigonométricas, teríamos

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

pelo que a trigonometria seria igualmente álgebra exponencial dissimulada. Se tomássemos $x = \pi = 3{,}14159...$ obteríamos um caso especial da equação:

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 \quad \text{ou} \quad e^{\pi i} + 1 = 0$$

Existe uma aura de mistério em redor desta última equação, que relaciona as cinco constantes mais importantes de toda a análise: 0, 1, e, π e i.

A mesma narrativa continuaria desta mística paragem em direcção à análise de Fourier, à análise de periodogramas, à análise de Fourier em grupos, às equações diferenciais e rapidamente chegaria a grandes teorias, grandes aplicações tecnológicas, sempre seguindo o espírito das unificações reais e potenciais que nos esperam em todos os pontos do universo (v. capítulo 5, «Análise de Fourier»).

5

Tópicos escolhidos de matemática

Tópicos escolhidos de matemática

O cerne da experiência matemática é, naturalmente, a própria matemática, isto é, o material nas revistas técnicas, monografias e, se suficientemente interessante e importante, a matéria que é ensinada. Embora o objectivo deste livro não seja ensinar nenhum ramo da matemática de um modo sistemático, seria uma grave omissão se não expuséssemos alguns tópicos individuais. Escolhemos seis.

A teoria dos grupos finitos simples é uma das áreas mais activas e bem-sucedidas da investigação matemática actual. É também uma área que vale a pena discutir de um ponto de vista metodológico, devido ao pormenor e à extensão, sem precedentes, das suas demonstrações.

O problema dos números primos gémeos revela a importância da experiência e do cálculo para estabelecer resultados teóricos.

A geometria não euclidiana representa um dos maiores avanços da matemática e é um ponto de viragem na história das ideias.

A teoria de conjuntos não cantoriana tem tido uma grande importância em toda a questão da existência e da realidade matemáticas, na escolha entre o platonismo e o formalismo. Em anos recentes, as ideias desta teoria têm sido não só frutuosas, como influentes.

A análise não standard demonstra a surpreendente aplicação da lógica matemática moderna aos problemas da análise. Ao reabilitar ideias ante-

riormente rejeitadas, mostra como é inadequado limitar a história da matemática à história do que foi formalizado e demonstrado rigorosamente. O contraditório e o pouco rigoroso desempenham um papel importante nesta história.

A análise de Fourier é um assunto absolutamente central numa grande parte da matemática moderna, pura e aplicada. A nossa discussão mostra a génese das suas ideias básicas e como ela moldou os conceitos das noções de função, integral e espaços de dimensão infinita.

Cada uma destas secções parte do básico e torna-se um pouco mais técnica à medida que avança. O leitor que julgar o conteúdo difícil é encorajado a saltar directamente para o próximo capítulo.

Teoria de grupos e classificação de grupos finitos simples

É interessante observar que o mais famoso problema do século em teoria de grupos possa ser expresso, partindo do nada, em apenas algumas linhas, que contêm, em princípio, todo o material necessário para trabalhar no problema. Aqui estão essas linhas.

Leis ou axiomas para grupos matemáticos

1. Um grupo é um conjunto G de elementos, que podem ser combinados dois a dois para obter outros elementos de G. A combinação de dois elementos a e b, nessa ordem, é indicada por $a \cdot b$. Para cada a e b em G, $a \cdot b$ está definido e existe em G.

2. Para todos os elementos a, b e c em G

$$A \cdot (b \cdot \mathrm{c}) = (a \cdot b) \cdot \mathrm{c}$$

3. Existe um elemento de identidade e em G, tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para qualquer a em G.

4. Para cada elemento a em G existe um elemento inverso a^{-1} em G, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Ordem: ao número de elementos de G chamamos a *ordem* de G. Se o número de elementos de G for finito, então G é um grupo *finito*.

Subgrupo: um subconjunto de G, que é também um grupo para a mesma operação de G, é referido como um *subgrupo* de G.

Subgrupo normal: um subgrupo H de G diz-se *normal* se, para cada g em G, ghg^{-1} pertence a H para qualquer h em H.

Grupo simples: um grupo G é designado simples se não tiver nenhum subgrupo normal, para além da identidade e do próprio G.

Grupo cíclico: um grupo finito diz-se *cíclico* se os seus elementos puderem ser dispostos de tal modo que, na tabela de multiplicação do grupo, cada linha corresponda à anterior, deslocada para a esquerda uma posição, e o último elemento da nova linha seja o primeiro da anterior.

Decoração baseada em grupos cíclicos

O mais famoso problema do século em teoria de grupos

Demonstre que todos os grupos finitos simples são cíclicos ou de ordem par.

O que consegue perceber um homenzinho da galáxia X-9 (ou mesmo um terrestre pouco versado em matemática) deste problema, apesar de termos dito que esta é uma formulação completa? Como podem aquelas palavras ser traduzidas em algo palpável? Será que ele compreenderia por que razão este problema é considerado tão importante? Ou será que teria de ser doutrinado em toda a cultura matemática, com a sua história, motivações, metodologia, teoremas e sistema de valores antes de alcançar aquela compreensão? À medida que à abstracção se sobreponha abstracção, o significado esfuma-se e toma-se mais distante. Vejamos até que ponto podemos extrair mais sumo da nossa formulação mínima em alguns parágrafos suplementares.

Grupos: «grupo» é uma estrutura matemática abstracta, uma das mais simples e das mais comuns em toda a matemática. Este conceito encontra aplicações, por exemplo, na teoria das equações, na teoria de números, na geometria diferencial, na cristalografia, na física atómica e na física de partículas. Estas últimas aplicações são particularmente interessantes; pois, em 1910, uma comissão de peritos, incluindo Oswald Veblen e Sir James Jeans, ao reverem o currículo de matemática de Princeton, con-

cluiu que a teoria de grupos deveria ser excluída, por não servir para nada, a não ser para bola de cristal de peritos.

A teoria de grupos começou como a teoria das permutações ou «substituições». Consideremos, por exemplo, três objectos diferentes, designados por 1, 2, 3. Estes três objectos podem ser permutados de seis maneiras diferentes:

$$
\begin{array}{ll}
e\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 1\,2\,3 \\
a\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 1\,3\,2 \\
b\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 2\,1\,3 \\
c\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 3\,2\,1 \\
p\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 2\,3\,1 \\
q\colon & 1\,2\,3 \rightarrow 3\,1\,2
\end{array}
$$

Podemos designar as operações de transformação apresentadas acima pelas letras à esquerda. Assim *e, a, b, c, p, q* representam as seis permutações de três objectos. Suponhamos, a seguir, que estas permutações são combinadas ou «multiplicadas» da maneira óbvia. Designamos esta operação por $\cdot$, o que quer dizer que $a \cdot b$ é a permutação que resulta de efectuarmos *a,* e depois *b.* Para identificarmos $a \cdot b$ como uma permutação podemos calcular

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \boldsymbol{a} & & \boldsymbol{b} & \\
1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 2 \\
2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 3 \\
3 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 1
\end{array}
$$

Assim, $a \cdot b$ transforma 1, 2, 3, em 2, 3, 1, que é precisamente a permutação *p.* Podemos então escrever $a \cdot b = p$.

Toda esta informação combinatória pode ser resumida, de forma clara, na seguinte tabela de multiplicação:

	e	*p*	*q*	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*p*	*q*	*a*	*b*	*c*
p	*p*	*q*	*e*	*c*	*a*	*b*
q	*q*	*e*	*p*	*b*	*c*	*a*
a	*a*	*b*	*c*	*e*	*p*	*q*
b	*b*	*c*	*a*	*q*	*e*	*p*
c	*c*	*a*	*b*	*p*	*q*	*e*

Pode ver-se (por verificação sistemática, se necessário) que a estrutura matemática constituída pelos elementos e, a, b, c, p, q, em conjunto com a operação $\cdot$, definida pela tabela representada, satisfaz os quatro axiomas e, portanto, é um grupo. É claro que os axiomas foram extraídos e aperfeiçoados, no decurso de várias gerações e a partir de muitos exemplos, como sendo os mais apropriados para a unificação desses exemplos numa teoria geral.

No contexto de um grupo pode efectuar-se alguma álgebra elementar. Em qualquer grupo, a equação $x \cdot a = b$ tem uma solução única $x = b \cdot a^{-1}$. A equação $ca = da$ implica $c = d$, etc.

Ordem: no exemplo dado há seis elementos. A teoria de grupos finitos restringe-se ao estudo dos grupos com um número finito de elementos (ordem finita). Existem grupos com um número infinito de elementos, onde as questões matemáticas que se colocam são bastante diferentes.

Deve ser claro que os símbolos para os elementos do grupo são perfeitamente arbitrários e que a tabela de multiplicação do grupo pode ser reescrita numa ordem diferente. Dois grupos são *isomorfos* (ou essencialmente idênticos) se tiverem a mesma tabela de multiplicação. De seguida encontra-se uma tabela que mostra o número de grupos diferentes que existem para diferentes ordens:

Ordem	**Número de grupos**
1	1
2	1
3	1
4	2
5	1
6	2
7	1
8	5
9	2
10	2
11	1
12	5

Não existe, na altura em que escrevemos, nenhum modo sistemático de gerar todos os grupos de uma dada ordem.

Cada grupo é um objecto matemático particular, com peculiaridades próprias, e as pessoas que trabalham em teoria de grupos dão-lhes nomes e símbolos especiais. Assim, temos o grupo diedral de ordem 4, o grupo alternante de ordem 12, etc.

Subgrupo: o conjunto de elementos *e, p, q,* extraído da tabela de multiplicação anterior, tem a própria tabela simples de multiplicação:

	e	*p*	*q*
e	*e*	*p*	*q*
p	*p*	*q*	*e*
q	*q*	*e*	*p*

Joseph Louis Lagrange
1736-1813

Mostra-se facilmente que este sistema está de acordo com os quatro axiomas, pelo que constitui um subgrupo do grupo original. Através de um famoso teorema de Lagrange sabe-se que a ordem de um subgrupo é sempre um divisor da ordem do próprio grupo. Como consequência, um grupo de ordem prima não tem subgrupos [a não ser o próprio (*e*)].

Grupo cíclico: comece-se com o elemento identidade *e* e os outros elementos numa ordem arbitrária: *e, a, b, ..., c.* Construa-se uma tabela de multiplicação, movendo, sucessivamente, em cada nova linha, um elemento para a esquerda, de modo a que o primeiro se torne o último:

	e	*a*	*b*	*c*
e	*e*	*a*	*b*	*c*
a	*a*	*b*	*c*	*e*
b	*b*	*c*	*e*	*a*
c	*c*	*e*	*a*	*b*

Formamos, assim, um grupo conhecido por grupo cíclico. A tabela acima mostra o grupo cíclico de ordem 4. É possível um esquema semelhante para qualquer ordem, ou seja, existe sempre pelo menos um grupo de uma dada ordem, pois é sempre possível construir o grupo cíclico correspondente.

Um grupo cíclico de ordem *n* pode ser visualizado geometricamente como a rotação de um plano através de múltiplos do ângulo $\frac{1}{N}(360°)$ Pode também ser imaginado em termos de álgebra clássica como o conjunto dos *n* números complexos $w^k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1$, $\sqrt{-1}$, com a multiplicação habitual (de números complexos).

Subgrupos normais, grupos simples

A teoria dos grupos finitos é análoga à teoria de números no seguinte sentido: tal como qualquer inteiro positivo tem uma factorização única num produto de números primos, também qualquer grupo finito pode ser, de certo modo, «factorizado»; pode ser representado como o «produto» de um subgrupo normal e de um «grupo quociente». Desta maneira, um grupo finito arbitrário pode ser construído a partir de «grupos simples» — grupos que não têm nenhum subgrupo normal, excepto os triviais (o próprio grupo, ou apenas o elemento identidade). Estes grupos «simples» são análogos aos números primos, que não têm nenhum divisor, para além dos triviais — o número 1 e ele próprio.

Deste modo, o estudo de grupos simples ocupa um papel central em teoria de grupos finitos, idêntico àquele que o estudo de números primos desempenha em teoria de números. O principal objectivo da teoria de grupos finitos é fornecer uma classificação completa de todos os «grupos simples».

Um grande passo nessa direcção foi dado em 1963, quando Walter Feit e John Thompson provaram que todos os grupos simples são cíclicos ou têm um número par de elementos. Esse facto tinha sido conjecturado por Burnside muitos anos antes. Seguindo a inspiração obtida com o sucesso de Feit-Thompson, surgiu uma nova e tremenda actividade em teoria de grupos finitos. Hoje em dia, os especialistas acreditam que estão muito perto da classificação completa de todos os grupos simples.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

D. Gorenstein.

O teorema dos números primos

A teoria dos números é, simultaneamente, um dos ramos mais elementares da matemática, uma vez que trata, essencialmente, das propriedades aritméticas dos inteiros 1, 2, 3, ..., mas é também um dos mais complicados, na medida em que está repleto de problemas e técnicas difíceis.

Entre os tópicos mais avançados da teoria dos números podem ser seleccionados três particularmente interessantes: a teoria das partições, o «último teorema» de Fermat e o teorema dos números primos. A teoria

das partições estuda de quantas maneiras pode um número ser representado como soma de outros mais pequenos. Por exemplo, incluindo a partição «nula», dois pode ser representado por 2 ou 1 + 1. Três pode ser representado por 3, 2 + 1, 1 + 1 + 1; quatro por 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1. O número de maneiras diferentes em que pode ser decomposto um número não é, de modo algum, um assunto simples e tem sido objecto de estudo desde meados do século XVIII. Se o leitor tentar experimentar, e se conseguir sistematizar o processo, verificará que o número 10 pode ser representado de 42 maneiras diferentes.

Pierre de Fermat
1601-1665

O «último teorema» de Fermat diz que, se $n > 2$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem solução com x, y, z inteiros e $xyz \neq 0$. Este teorema foi demonstrado (1979) para todos os $n < 30\,000$, mas o teorema geral* tem iludido os cientistas. Devido à sua história peculiar, este problema tem atraído mais do que a sua quota-parte de tolices matemáticas e a maioria dos matemáticos deseja ardentemente que o problema seja resolvido.

O teorema dos números primos, o assunto desta secção, é também uma grande atracção e um mistério, estando relacionado com alguns dos temas centrais da análise matemática. Este teorema está ligado àquele que, possivelmente, é o mais famoso dos problemas matemáticos em aberto — a chamada hipótese de Riemann. O teorema dos números primos é um dos melhores exemplos, em toda a matemática, da busca de ordem a partir do caos.

Pouco depois de uma criança aprender a multiplicar e a dividir, nota que alguns números são especiais. Quando um número é factorizado, é decomposto nos seus constituintes básicos — os factores primos. Assim, $6 = 2 \times 3$, $28 = 2 \times 2 \times 7$, $270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$, e estas decomposições não podem ser simplificadas. Os números 2, 3, 5, 7, ... são números primos, ou seja, não podem ser decompostos em produtos de números menores. Entre os inteiros, os números primos desempenham um papel análogo ao dos elementos em química.

---

* Em Junho de 1993, o matemático Andrew J. Wiles, de Princeton, apresentou na Universidade de Cambridge uma prova do teorema geral, que está agora a ser estudada em pormenor por outros matemáticos para garantir a correcção das mais de 180 páginas da demonstração. *(N. do T.)*

Tabela dos primeiros 2500 números primos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2	547	1229	1993	2749	3581	4421	5281	6143	7001	7927	8837	9739	10663	11677	12569	13513	14533	15413	16411	17393	18329	19427	20359	21391
2	3	557	1231	1997	2753	3583	4423	5297	6151	7013	7933	8839	9743	10667	11681	12577	13523	14537	15427	16417	17401	18341	19429	20369	21397
3	5	563	1237	1999	2767	3593	4441	5303	6163	7019	7937	8849	9749	10687	11689	12583	13537	14543	15439	16421	17417	18353	19433	20389	21401
4	7	569	1249	2003	2777	3607	4447	5309	6173	7027	7949	8861	9767	10691	11699	12589	13553	14549	15443	16427	17419	18367	19441	20393	21407
5	11	571	1259	2011	2789	3613	4451	5323	6197	7039	7951	8863	9769	10709	11701	12601	13567	14551	15451	16433	17431	18371	19447	20399	21419
6	13	577	1277	2017	2791	3617	4457	5333	6199	7043	7963	8867	9781	10711	11717	12611	13577	14557	15461	16447	17443	18379	19457	20407	21433
7	17	587	1279	2027	2797	3623	4463	5347	6203	7057	7993	8887	9787	10723	11719	12613	13591	14561	15467	16451	17449	18397	19463	20411	21467
8	19	593	1283	2029	2801	3631	4481	5351	6211	7069	8009	8893	9791	10729	11731	12619	13597	14563	15473	16453	17467	18401	19469	20431	21481
9	23	599	1289	2039	2803	3637	4483	5381	6217	7079	8011	8923	9803	10733	11743	12637	13613	14591	15493	16477	17471	18413	19471	20441	21487
10	29	601	1291	2053	2819	3643	4493	5387	6221	7103	8017	8929	9811	10739	11777	12641	13619	14593	15497	16481	17477	18427	19477	20443	21491
11	31	607	1297	2063	2833	3659	4507	5393	6229	7109	8039	8933	9817	10753	11779	12647	13627	14621	15511	16487	17483	18433	19483	20477	21493
12	37	613	1301	2069	2837	3671	4513	5399	6247	7121	8053	8941	9829	10771	11783	12653	13633	14627	15527	16493	17489	18439	19489	20479	21499
13	41	617	1303	2081	2843	3673	4517	5407	6257	7127	8059	8951	9833	10781	11789	12659	13649	14629	15541	16519	17491	18443	19501	20483	21503
14	43	619	1307	2083	2851	3677	4519	5413	6263	7129	8069	8963	9839	10789	11801	12671	13669	14633	15551	16529	17497	18451	19507	20507	21517
15	47	631	1319	2087	2857	3691	4523	5417	6269	7151	8081	8969	9851	10799	11807	12689	13679	14639	15559	16547	17509	18457	19531	20509	21521
16	53	641	1321	2089	2861	3697	4547	5419	6271	7159	8087	8971	9857	10831	11813	12697	13681	14653	15569	16553	17519	18461	19541	20521	21523
17	59	643	1327	2099	2879	3701	4549	5431	6277	7177	8089	8999	9859	10837	11821	12703	13687	14657	15581	16561	17539	18481	19543	20533	21529
18	61	647	1361	2111	2887	3709	4561	5437	6287	7187	8093	9001	9871	10847	11827	12713	13691	14669	15583	16567	17551	18493	19553	20543	21557
19	67	653	1367	2113	2897	3719	4567	5441	6299	7193	8101	9007	9883	10853	11831	12721	13693	14683	15601	16573	17569	18503	19559	20549	21559
20	71	659	1373	2129	2903	3727	4583	5443	6301	7207	8111	9011	9887	10859	11833	12739	13697	14699	15607	16603	17573	18517	19571	20551	21563
21	73	661	1381	2131	2909	3733	4591	5449	6311	7211	8117	9013	9901	10861	11839	12743	13709	14713	15619	16607	17579	18521	19577	20563	21569
22	79	673	1399	2137	2917	3739	4597	5471	6317	7213	8123	9029	9907	10867	11863	12757	13711	14717	15629	16619	17581	18523	19583	20593	21577
23	83	677	1409	2141	2927	3761	4603	5477	6323	7219	8147	9041	9923	10883	11867	12763	13721	14723	15641	16631	17597	18539	19597	20599	21587
24	89	683	1423	2143	2939	3767	4621	5479	6329	7229	8161	9043	9929	10889	11887	12781	13723	14731	15643	16633	17599	18541	19603	20611	21589
25	97	691	1427	2153	2953	3769	4637	5483	6337	7237	8167	9049	9931	10891	11897	12791	13729	14737	15647	16649	17609	18553	19609	20627	21599
26	101	701	1429	2161	2957	3779	4639	5501	6343	7243	8171	9059	9941	10903	11903	12799	13751	14741	15649	16651	17623	18583	19661	20639	21601
27	103	709	1433	2179	2963	3793	4643	5503	6353	7247	8179	9067	9949	10909	11909	12809	13757	14747	15661	16657	17627	18587	19681	20641	21611
28	107	719	1439	2203	2969	3797	4649	5507	6359	7253	8191	9091	9967	10937	11923	12821	13759	14753	15667	16661	17657	18593	19687	20663	21613
29	109	727	1447	2207	2971	3803	4651	5519	6361	7283	8209	9103	9973	10939	11927	12823	13763	14759	15671	16673	17659	18617	19697	20681	21617
30	113	733	1451	2213	2999	3821	4657	5521	6367	7297	8219	9109	10007	10949	11933	12829	13781	14767	15679	16691	17669	18637	19699	20693	21647
31	127	739	1453	2221	3001	3823	4663	5527	6373	7307	8221	9127	10009	10957	11939	12841	13789	14771	15683	16693	17681	18661	19709	20707	21649
32	131	743	1459	2237	3011	3833	4673	5531	6379	7309	8231	9133	10037	10973	11941	12853	13799	14779	15727	16699	17683	18671	19717	20717	21661
33	137	751	1471	2239	3019	3847	4679	5557	6389	7321	8233	9137	10039	10979	11953	12889	13807	14783	15731	16703	17707	18679	19727	20719	21673
34	139	757	1481	2243	3023	3851	4691	5563	6397	7331	8237	9151	10061	10987	11959	12893	13829	14797	15733	16729	17713	18691	19739	20731	21683
35	149	761	1483	2251	3037	3853	4703	5569	6421	7333	8243	9157	10067	10993	11969	12899	13831	14813	15737	16741	17729	18701	19751	20743	21701
36	151	769	1487	2267	3041	3863	4721	5573	6427	7349	8263	9161	10069	11003	11971	12907	13841	14821	15739	16747	17737	18713	19753	20747	21713
37	157	773	1489	2269	3049	3877	4723	5581	6449	7351	8269	9173	10079	11027	11981	12911	13859	14827	15749	16759	17747	18719	19759	20749	21727
38	163	787	1493	2273	3061	3881	4729	5591	6451	7369	8273	9181	10091	11047	11987	12917	13873	14831	15761	16763	17749	18731	19763	20753	21737
39	167	797	1499	2281	3067	3889	4733	5623	6469	7393	8287	9187	10093	11057	12007	12919	13877	14843	15767	16787	17761	18743	19777	20759	21739
40	173	809	1511	2287	3079	3907	4751	5639	6473	7411	8291	9199	10099	11059	12011	12923	13879	14851	15773	16811	17783	18749	19793	20771	21751
41	179	811	1523	2293	3083	3911	4759	5641	6481	7417	8293	9203	10103	11069	12037	12941	13883	14867	15787	16823	17789	18757	19801	20773	21757
42	181	821	1531	2297	3089	3917	4783	5647	6491	7433	8297	9209	10111	11071	12041	12953	13901	14869	15791	16829	17791	18773	19813	20789	21767
43	191	823	1543	2309	3109	3919	4787	5651	6521	7451	8311	9221	10133	11083	12043	12959	13903	14879	15797	16831	17807	18787	19819	20807	21773
44	193	827	1549	2311	3119	3923	4789	5653	6529	7457	8317	9227	10139	11087	12049	12967	13907	14887	15803	16843	17827	18793	19841	20809	21787
45	197	829	1553	2333	3121	3929	4793	5657	6547	7459	8329	9239	10141	11093	12071	12973	13913	14891	15809	16871	17837	18797	19843	20849	21799
46	199	839	1559	2339	3137	3931	4799	5659	6551	7477	8353	9241	10151	11113	12073	12979	13921	14897	15817	16879	17839	18803	19853	20857	21803
47	211	853	1567	2341	3163	3943	4801	5669	6553	7481	8363	9257	10159	11117	12097	12983	13931	14923	15823	16883	17851	18839	19861	20873	21817
48	223	857	1571	2347	3167	3947	4813	5683	6563	7487	8369	9277	10163	11119	12101	13001	13933	14929	15859	16889	17863	18859	19867	20879	21821
49	227	859	1579	2351	3169	3967	4817	5689	6569	7489	8377	9281	10169	11131	12107	13003	13963	14939	15877	16901	17881	18869	19889	20887	21839
50	229	863	1583	2357	3181	3989	4831	5693	6571	7499	8387	9283	10177	11149	12109	13007	13967	14947	15881	16903	17891	18899	19891	20897	21841
51	233	877	1597	2371	3187	4001	4861	5701	6577	7507	8389	9293	10181	11159	12113	13009	13997	14951	15887	16921	17903	18911	19913	20899	21851
52	239	881	1601	2377	3191	4003	4871	5711	6581	7517	8419	9311	10193	11161	12119	13033	13999	14957	15889	16927	17909	18913	19919	20903	21859
53	241	883	1607	2381	3203	4007	4877	5717	6599	7523	8423	9319	10211	11171	12143	13037	14009	14969	15901	16931	17911	18917	19927	20921	21863
54	251	887	1609	2383	3209	4013	4889	5737	6607	7529	8429	9323	10223	11173	12149	13043	14011	14983	15907	16937	17921	18919	19937	20929	21871
55	257	907	1613	2389	3217	4019	4903	5741	6619	7537	8431	9337	10243	11177	12157	13049	14029	15013	15913	16943	17923	18947	19949	20939	21881
56	263	911	1619	2393	3221	4021	4909	5743	6637	7541	8443	9341	10247	11197	12161	13063	14033	15017	15919	16963	17929	18959	19961	20947	21893
57	269	919	1621	2399	3229	4027	4919	5749	6653	7547	8447	9343	10253	11213	12163	13093	14051	15031	15923	16979	17939	18973	19963	20959	21911
58	271	929	1627	2411	3251	4049	4931	5779	6659	7549	8461	9349	10259	11239	12197	13099	14057	15053	15937	16981	17957	18979	19973	20963	21929
59	277	937	1637	2417	3253	4051	4933	5783	6661	7559	8467	9371	10267	11243	12203	13103	14071	15061	15959	16987	17959	19001	19979	20981	21937
60	281	941	1657	2423	3257	4057	4937	5791	6673	7561	8501	9377	10271	11251	12211	13109	14081	15073	15971	16993	17971	19009	19991	20983	21943
61	283	947	1663	2437	3259	4073	4943	5801	6679	7573	8513	9391	10273	11257	12227	13121	14083	15077	15973	17011	17977	19013	19993	21001	21961
62	293	953	1667	2441	3271	4079	4951	5807	6689	7577	8521	9397	10289	11261	12239	13127	14087	15083	15991	17021	17981	19031	19997	21011	21977
63	307	967	1669	2447	3299	4091	4957	5813	6691	7583	8527	9403	10301	11273	12241	13147	14107	15091	16001	17027	17987	19037	20011	21013	21991
64	311	971	1693	2459	3301	4093	4967	5821	6701	7589	8537	9413	10303	11279	12251	13151	14143	15101	16007	17029	17989	19051	20021	21017	21997
65	313	977	1697	2467	3307	4099	4969	5827	6703	7591	8539	9419	10313	11287	12253	13159	14149	15107	16033	17033	18013	19069	20023	21019	22003
66	317	983	1699	2473	3313	4111	4973	5839	6709	7603	8543	9421	10321	11299	12263	13163	14153	15121	16057	17041	18041	19073	20029	21023	22013
67	331	991	1709	2477	3319	4127	4987	5843	6719	7607	8563	9431	10331	11311	12269	13171	14159	15131	16061	17047	18043	19079	20047	21031	22027
68	337	997	1721	2503	3323	4129	4993	5849	6733	7621	8573	9433	10333	11317	12277	13177	14173	15137	16063	17053	18047	19081	20051	21059	22031
69	347	1009	1723	2521	3329	4133	4999	5851	6737	7639	8581	9437	10337	11321	12281	13183	14177	15139	16067	17077	18049	19087	20063	21061	22037
70	349	1013	1733	2531	3331	4139	5003	5857	6761	7643	8597	9439	10343	11329	12289	13187	14197	15149	16069	17093	18059	19121	20071	21067	22039
71	353	1019	1741	2539	3343	4153	5009	5861	6763	7649	8599	9461	10357	11351	12301	13217	14207	15161	16073	17099	18061	19139	20089	21089	22051
72	359	1021	1747	2543	3347	4157	5011	5867	6779	7669	8609	9463	10369	11353	12323	13219	14221	15173	16087	17107	18077	19141	20101	21101	22063
73	367	1031	1753	2549	3359	4159	5021	5869	6781	7673	8623	9467	10391	11369	12329	13229	14243	15187	16091	17117	18089	19157	20107	21107	22067
74	373	1033	1759	2551	3361	4177	5023	5879	6791	7681	8627	9473	10399	11383	12343	13241	14249	15193	16097	17123	18097	19163	20113	21121	22073
75	379	1039	1777	2557	3371	4201	5039	5881	6793	7687	8629	9479	10427	11393	12347	13249	14251	15199	16103	17137	18119	19181	20117	21139	22079
76	383	1049	1783	2579	3373	4211	5051	5897	6803	7691	8641	9491	10429	11399	12373	13259	14281	15217	16111	17159	18121	19183	20123	21143	22091
77	389	1051	1787	2591	3389	4217	5059	5903	6823	7699	8647	9497	10433	11411	12377	13267	14293	15227	16127	17167	18127	19207	20129	21149	22093
78	397	1061	1789	2593	3391	4219	5077	5923	6827	7703	8663	9511	10453	11423	12379	13291	14303	15233	16139	17183	18131	19211	20143	21157	22109
79	401	1063	1801	2609	3407	4229	5081	5927	6829	7717	8669	9521	10457	11437	12391	13297	14321	15241	16141	17189	18133	19213	20147	21163	22111
80	409	1069	1811	2617	3413	4231	5087	5939	6833	7723	8677	9533	10459	11443	12401	13309	14323	15259	16183	17191	18143	19219	20149	21169	22123
81	419	1087	1823	2621	3433	4241	5099	5953	6841	7727	8681	9539	10463	11447	12409	13313	14327	15263	16187	17203	18149	19231	20161	21179	22129
82	421	1091	1831	2633	3449	4243	5101	5981	6857	7741	8689	9547	10477	11467	12413	13327	14341	15269	16189	17207	18169	19237	20173	21187	22133
83	431	1093	1847	2647	3457	4253	5107	5987	6863	7753	8693	9551	10487	11471	12421	13331	14347	15271	16193	17209	18181	19249	20177	21191	22147
84	433	1097	1861	2657	3461	4259	5113	6007	6869	7757	8699	9587	10499	11483	12433	13337	14369	15277	16217	17231	18191	19259	20183	21193	22153
85	439	1103	1867	2659	3463	4261	5119	6011	6871	7759	8707	9601	10501	11489	12437	13339	14387	15287	16223	17239	18199	19267	20201	21211	22157
86	443	1109	1871	2663	3467	4271	5147	6029	6883	7789	8713	9613	10513	11491	12451	13367	14389	15289	16229	17257	18211	19273	20219	21221	22159
87	449	1117	1873	2671	3469	4273	5153	6037	6899	7793	8719	9619	10529	11497	12457	13381	14401	15299	16231	17291	18217	19289	20231	21227	22171
88	457	1123	1877	2677	3491	4283	5167	6043	6907	7817	8731	9623	10531	11503	12473	13397	14407	15307	16249	17293	18223	19301	20233	21247	22189
89	461	1129	1879	2683	3499	4289	5171	6047	6911	7823	8737	9629	10559	11519	12479	13399	14411	15313	16253	17299	18229	19309	20249	21269	22193
90	463	1151	1889	2687	3511	4297	5179	6053	6917	7829	8741	9631	10567	11527	12487	13411	14419	15319	16267	17317	18233	19319	20261	21277	22229
91	467	1153	1901	2689	3517	4327	5189	6067	6947	7841	8747	9643	10589	11549	12491	13417	14423	15329	16273	17321	18251	19333	20269	21283	22247
92	479	1163	1907	2693	3527	4337	5197	6073	6949	7853	8753	9649	10597	11551	12497	13421	14431	15331	16301	17327	18253	19373	20287	21313	22259
93	487	1171	1913	2699	3529	4339	5209	6079	6959	7867	8761	9661	10601	11579	12503	13441	14437	15349	16319	17333	18257	19379	20297	21317	22271
94	491	1181	1931	2707	3533	4349	5227	6089	6961	7873	8779	9677	10607	11587	12511	13451	14447	15359	16333	17341	18269	19381	20323	21319	22273
95	499	1187	1933	2711	3539	4357	5231	6091	6967	7877	8783	9679	10613	11593	12517	13457	14449	15361	16339	17351	18287	19387	20327	21323	22277
96	503	1193	1949	2713	3541	4363	5233	6101	6971	7879	8803	9689	10627	11597	12527	13463	14461	15373	16349	17359	18289	19391	20333	21341	22279
97	509	1201	1951	2719	3547	4373	5237	6113	6977	7883	8807	9697	10631	11617	12539	13469	14479	15377	16361	17377	18301	19403	20341	21347	22283
98	521	1213	1973	2729	3557	4391	5261	6121	6983	7901	8819	9719	10639	11621	12541	13477	14489	15383	16363	17383	18307	19417	20347	21377	22291
99	523	1217	1979	2731	3559	4397	5273	6131	6991	7907	8821	9721	10651	11633	12547	13487	14503	15391	16369	17387	18311	19421	20353	21379	22303
100	541	1223	1987	2741	3571	4409	5279	6133	6997	7919	8831	9733	10657	11657	12553	13499	14519	15401	16381	17389	18313	19423	20357	21383	22307

Fonte: D. N. Lehmer, *Lista de números primos de 1 a 10 006 721.* Carnegie Institution of Washington, publicação n.º 165, Washington, D. C., 1914

Façamos uma lista dos primeiros números primos:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113 ...

Esta lista não tem fim. Já Euclides tinha provado que existem infinitos números primos. A prova de Euclides é fácil e elegante, pelo que vamos descrevê-la.

Suponhamos que temos uma lista completa de todos os números primos até p_m. Considere-se o inteiro $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p_m) + 1$, formado pela adição de 1 ao produto de todos os números primos até p_m. N é maior do que p_m (pois é, de certeza, mais do dobro). Quando N é dividido por 2, o resultado é $3 \cdot 5 \cdots p_m$, sendo o resto 1. Quando é dividido por três, o resultado é $2 \cdot 5 \cdots p_m$, sendo o resto, novamente 1. De modo semelhante, quando dividido por qualquer dos números primos 2, 3, 5, ..., p_m, o resto é sempre 1.

Contudo, N é ou não um número primo. Se for primo, é um número primo maior do que p_m.Se não for primo, então, pode ser factorizado em números primos. No entanto, como acabámos de verificar, nenhum dos seus factores primos pode ser 2, 3, 5, ..., p_m. Logo, tem de existir um número primo maior do que p_m.

O argumento lógico (na realidade, o dilema, que nos leva a chegar à mesma conclusão, qualquer que seja a nossa hipótese de partida) demonstra que a lista de números primos nunca acaba.

A segunda característica destes números que nos surpreende é a ausência de qualquer padrão, ou regularidade, aparente. É claro que todos os primos, excepto o 2, são ímpares, sendo, portanto, a diferença entre dois números primos sucessivos um número par. Porém, parece ser completamente aleatório que número par seja esse.

Existem nove números primos entre 9 999 900 e 10 000 000:

9 999 901	9 999 907	9 999 929	9 999 931
9 999 937	9 999 943	9 999 971	9 999 973
9 999 991.			

Mas entre os cem números seguintes, de 10 000 000 até 10 000 100, só há dois:

10 000 019 e 10 000 079

«Depois de vermos estes números, temos a sensação de estar na presença de um dos inexplicáveis segredos da criação», escreve Don Zagier num desabafo de moderno misticismo matemático.

O que se sabe sobre os números primos e o que não se sabe ou é apenas conjectura preencheriam um livro bem grande. Mencionemos alguns exemplos. O maior número primo conhecido em 1979 era $2^{21\,701} - 1$. Existe um número primo entre n e $2n$ para cada $n > 1$. Existirá um número primo entre n^2 e $(n + 1)^2$ para cada $n > 0$? Ninguém sabe. Será que existem infinitos números primos da forma $n^2 + 1$ com n inteiro? Ninguém sabe. Existem sequências arbitrariamente grandes de inteiros que não contêm nenhum número primo. Nenhum polinómio com coeficientes inteiros pode tomar apenas valores primos nos inteiros. Existe um número irracional A tal que $[A^{3^n}]$ é sempre um número primo quando $n = 0, 1, 2, \ldots$ (O símbolo $[x]$ significa o maior inteiro $\leq x$.) Será que cada número par é a soma de dois números primos ímpares? Ninguém sabe; esta é a famosa conjectura de Goldbach. Existirão pares infinitos de números primos cuja diferença seja 2, como 11;13, ou 17;19, ou 10 006 427;10 006 429? É este o problema dos números primos gémeos, mas ninguém sabe a resposta, embora a maioria dos matemáticos esteja convencida de que, muito provavelmente, é afirmativa.

Alguma ordem emerge deste caos quando estudamos os números primos colectivamente, e não individualmente; consideramos a estatística social dos números primos, e não as excentricidades individuais. Primeiro fazemos uma tabela extensa de números primos, o que é difícil e entediante com papel e lápis, mas fácil com um computador moderno. Em seguida, contamos quantos há até um determinado inteiro. A função $\pi(n)$ é definida como o número de números primos menores ou iguais a n. A função $\pi(n)$ quantifica a distribuição dos números primos. A partir dela é natural calcular a razão $n/\pi(n)$, que nos diz que fracção dos números até n são primos. (Na realidade, isto corresponde ao inverso daquela fracção.) Aqui está o resultado de um cálculo recente:

n	$\pi(n)$	$n/p(n)$
10	4	2,5
100	25	4,0
1000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 512	22,0

Note-se que, quando avançamos de uma potência de 10 para a seguinte, a razão $n/\pi(n)$ aumenta, aproximadamente, 2,3. (Por exemplo, 22,0 – 19,7 =

Carl Friedrich Gauss
1777-1885

2,3.) Neste ponto, qualquer matemático digno desse nome pensará em $\log_e 10 (= 2{,}30258...)$ e, com base nestes factos, é natural que formule a conjectura de que $\pi(n)$ será aproximadamente igual a $\frac{n}{\log n}$. A afirmação mais formal de que

$$\lim_{n \to \infty} \pi(n)/(n/\log n) = 1$$

é o famoso teorema dos números primos. A descoberta deste teorema pode ser atribuída a Gauss, aos 15 anos (cerca de 1792), mas a prova matemática rigorosa data de 1896, dos trabalhos independentes de C. de la Vallée Poussin e Jacques Hadamard. Aqui temos ordem extraída do caos, dando uma lição moral de como excentricidades individuais podem coexistir lado a lado com lei e ordem.

Jacques Hadamard
1865-1963

Embora a expressão $n/\log n$ seja uma aproximação bastante simples para $\pi(n)$, não é especialmente boa, e os matemáticos têm-se esforçado por aperfeiçoá-la, o que, como é evidente, só tem sido conseguido à custa de complicações adicionais. Uma das aproximações mais satisfatórias para $\pi(n)$ é dada pela função

$$R(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\zeta(k+1)} \frac{(\log n)^k}{k!}$$

onde $\zeta(z)$ representa a célebre função zeta de Riemann: $\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + ...$ A tabela junta mostra como é notável a aproximação dada por $R(n)$ para $\pi(n)$:

	$\pi(n)$	**R**(n)
100 000 000	5 761 455	5 761 552
200 000 000	11 078 937	11 079 090
300 000 000	16 252 325	16 252 355
400 000 000	21 336 326	21 336 185
500 000 000	26 355 867	26 355 517

	$\pi(n)$	$\mathbf{R}(n)$
600 000 000	31 324 703	31 324 622
700 000 000	36 252 931	36 252 719
800 000 000	41 146 179	41 146 248
900 000 000	46 009 215	46 009 949
1 000 000 000	50 847 534	50 847 455

Vejamos, então, finalmente, a questão dos números primos gémeos. Pensa-se que existe um número infinito desses pares, embora seja ainda um problema em aberto.

Porque acreditamos que é verdade, mesmo não havendo demonstração? Antes de mais, existem fortes indicações numéricas nesse sentido; parece não existir nenhum conjunto de números naturais tão remotos que sejam maiores do que o maior par de números primos. Mas, além disso, temos uma ideia de *quantos* pares de números primos existem. Podemos ter essa ideia notando que a ocorrência de pares de números primos numa tabela parece ser imprevísivel ou *aleatória*. Isto sugere que a probabilidade de dois números n e $n + 2$ serem primos funciona como a probabilidade de sair cara em dois lançamentos consecutivos de uma moeda. Se duas experiências aleatórias seguidas são independentes, a probabilidade de sucesso das duas é o produto das probabilidades de sucesso de cada uma; por exemplo, se numa moeda a probabilidade de sair cara é $^1/_2$, em duas moedas a probabilidade de sair cara em ambas é $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$.

O teorema dos números primos, que *foi* provado, diz que, se escolhermos um número x ao acaso entre 0 e n, com n grande, a probabilidade de x ser primo é «de cerca» $\frac{1}{\log n}$. Quanto maior for n, melhor será a aproximação dada por $\frac{1}{\log n}$ à proporção de números primos até n.

Se confiarmos na nossa intuição de que o aparecimento de números primos gémeos é idêntico ao de nas duas moedas sair cara, então, a probabilidade de tanto n como $n + 2$ serem primos seria de cerca $\frac{n}{(\log n)^2}$. Por outras palavras, existiriam cerca de $\frac{n}{(\log n)^2}$ números primos gémeos entre 0 e n. Esta fracção tende para o infinito quando n caminha para o infinito; teríamos, assim, uma versão quantitativa da conjectura dos números primos gémeos.

Por razões que envolvem o facto de $n + 2$ ser ou não primo depender da suposição de ser n, ele próprio, primo, devemos modificar o nosso cálculo de $\frac{n}{(\log n)^2}$ para $\frac{(1{,}32032...)n}{(\log n)^2}$.

Apresentamos uma comparação entre o que se verifica e o que é previsto por esta fórmula simples. O acordo é bastante bom, mas ainda falta escrever o QED final:

Intervalo	Primos gémeos espe-rados	Primos gémeos encon-trados
100 000 000–100 150 000	584	601
1 000 000 000–1 000 150 000	461	466
10 000 000 000–10 000 150 000	374	389
100 000 000 000–100 000 150 000	309	276
1 000 000 000 000–1 000 000 150 000	259	276
10 000 000 000 000–10 000 000 150 000	221	208
100 000 000 000 000–100 000 000 150 000	191	186
1 000 000 000 000 000–1 000 000 000 150 000	166	161

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

E. Grosswald; D. N. Lehmer; D. Zagier.

Geometria não euclidiana

Euclides
c. 300 a. C.

O aparecimento na cena matemática, há século e meio, das geometrias não euclidianas foi acompanhado por um certo choque e cepticismo. Hoje em dia, a existência de tais geometrias é facilmente explicada em poucas palavras e será facilmente percebida. Qualquer teoria matemática, como a aritmética, a geometria, a álgebra, a topologia, etc., pode ser apresentada como um esquema axiomático, dentro do qual são sistemática e logicamente deduzidas consequências a partir dos axiomas. Tal esquema lógico-dedutivo

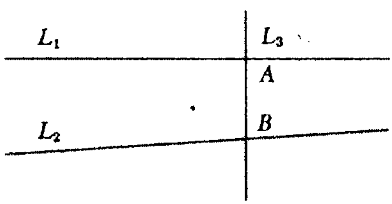
pode ser comparado a um jogo e os axiomas às regras. Qualquer pessoa que participe em jogos sabe que podem ser inventadas variações de determinado jogo e que as consequências serão diferentes. Uma geometria não euclidiana é aquela que é jogada com axiomas diferentes dos de Euclides.

É claro que esta simples explicação viola a ordem histórica, pois recorre a uma filosofia da matemática que surgiu precisamente da descoberta de tais geometrias. Para uma maior compreensão do assunto, é necessário ver o que aconteceu cronologicamente.

Desde os Gregos, a geometria tem tomado dois aspectos. É considerada uma descrição precisa do espaço onde vivemos, assim como uma disciplina intelectual, uma estrutura dedutiva. Estes dois aspectos são agora encarados separadamente, mas nem sempre foi assim. A geometria de Euclides baseava-se num certo número de axiomas e postulados, dos quais citamos os primeiros cinco (a distinção entre as palavras *axioma* e *postulado* é obscura — a matemática moderna usa as palavras quase indiferentemente):

1. Entre dois pontos quaisquer pode ser traçada uma linha recta.
2. As extremidades de qualquer segmento de recta podem ser prolongadas indefinidamente.
3. Pode traçar-se uma circunferência com centro em qualquer ponto e com qualquer raio determinado.
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. Se duas linhas rectas no plano são intersectadas por outra recta, e se a soma dos ângulos internos de um dos lados é menor do que dois ângulos rectos, então, as duas linhas rectas intersectar-se-ão se forem prolongadas o suficiente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos rectos.

Por outras palavras, em relação à figura



se $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 180°$, as linhas L_1 e L_2 intersectam-se em algum ponto à direita de L_3.

A palavra *axioma,* ou *postulado,* significava, antigamente, uma verdade evidente ou reconhecida universalmente, uma verdade aceite sem prova. Dentro da geometria dedutiva, o axioma funciona como o pilar em que as outras conclusões assentam. Dentro da geometria descritiva, o

axioma funciona como uma afirmação verdadeira e exacta sobre o mundo das experiências espaciais. A primeira interpretação persiste, mas a segunda teve de ser abandonada.

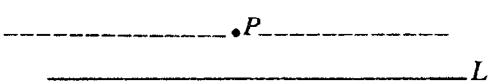
Se olharmos para os postulados 1, 2, 3, 4, eles parecem simples e até mesmo evidentes. O postulado 5 é diferente. É complicado e muito menos evidente. Parece transcender a experiência física directa. O postulado 5 é conhecido como o postulado das paralelas de Euclides, ou, mais familiarmente, aludindo às emendas da Constituição dos Estados Unidos, a quinta de Euclides*. Desde os tempos mais remotos atraiu atenções especiais.

O desenvolvimento histórico da geometria não euclidiana foi resultado de tentativas de estudo deste axioma. Salienta-se ainda que, embora o quinto postulado seja conhecido como o axioma das paralelas, não contém a palavra *paralela.* Essa palavra está esclarecida por Euclides na definição 23.

«Linhas rectas paralelas são aquelas que, estando no mesmo plano, se forem prolongadas indefinidamente em ambas as direcções, nunca se encontram.»

A razão por que chamamos à quinta de Euclides o axioma das paralelas prende-se com o facto de ele ser totalmente equivalente a qualquer das seguintes afirmações, que envolvem a palavra *paralela:*

1. Se uma linha recta intersecta uma de duas paralelas, então, intersectará também a outra.
2. Linhas rectas paralelas em relação à mesma linha recta são paralelas entre si.
3. Duas rectas que se intersectam não podem ser paralelas à mesma linha recta.
4. Dada, num plano, uma linha L e um ponto P exterior a L, então por P passa uma e só uma linha recta paralela a L:



Equivalência significa que qualquer destas afirmações em conjunto com os outros axiomas implica a quinta de Euclides, e vice-versa.

Ao longo dos anos, por razões, em parte, técnicas e, em parte, estéticas, a quarta formulação foi-se afirmando como a formulação convencional da ideia de paralelismo de Euclides. É conhecida como o axioma de Playfair, em honra do britânico John Playfair, 1748-1819.

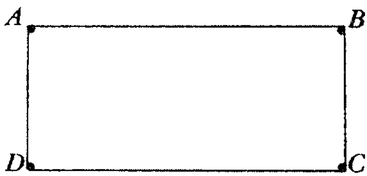
---

* *Euclid's fifth* no original. *(N. do T.)*

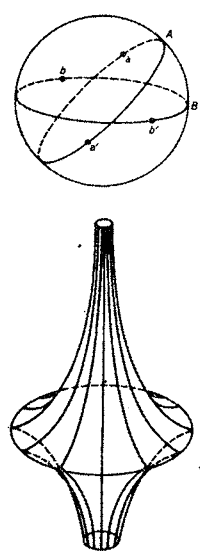
As primeiras investigações do quinto postulado tentaram suavizar as dúvidas quanto à sua validade, tentando deduzi-lo logicamente dos outros axiomas, que pareciam evidentes. Passaria então a ser um teorema e a sua veracidade, assegurada. Essas tentativas falharam, e por uma boa razão — sabemos hoje que é impossível deduzi-lo dessa maneira, o que ficou estabelecido em 1868.

Como os métodos directos não resultavam, era inevitável que os matemáticos se voltassem para os métodos indirectos. Numa tal aproximação, nega-se o postulado, tentando-se daí extrair uma contradição.

Dois notáveis investigadores que utilizaram a *reductio ad absurdum* foram Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Lambert (1728-1777). Ambos negáram o quinto postulado:



Saccheri trabalhou com um quadrilátero *ABCD* com ângulos rectos em *A* e *B* e no qual *AD* = *BC*. Este é agora conhecido na geometria axiomática como o quadrilátero de Saccheri. Deve notar-se que na geometria euclidiana *AD* será paralelo a *BC*, o que faz com que os ângulos



Na superfície de uma esfera, a expressão linha recta *é interpretada como* círculo máximo *(*A *e* B *em cima). Através de qualquer par de pontos diametralmente opostos (*aa′ *e* bb′*) passam muitos círculos máximos. Se interpretarmos «ponto» como «par de pontos», o primeiro postulado de Euclides é verdadeiro. O segundo postulado será verdadeiro se permitirmos que a «linha recta» tenha um comprimento total finito, ou que passe pelos mesmos pontos muitas vezes à medida que circunda a esfera. O terceiro postulado será também verdadeiro se a distância for medida ao longo de círculos máximos, que podem ser percorridos várias vezes; neste contexto, «círculo» refere-se ao conjunto de pontos da esfera a uma dada distância (sobre um círculo máximo) a partir de determinado ponto. O quarto postulado é igualmente verdadeiro. O postulado de Playfair é falso, porque quaisquer dois grandes círculos se intersectam. Deste modo, a esfera é um modelo para uma geometria não euclidiana. O mesmo se poderá dizer da pseudo-esfera (em baixo) se interpretarmos as linhas rectas como sendo as curvas mais curtas ligando quaisquer dois pontos sobre a superfície. Na superfície da pseudo-esfera existem muitas «linhas rectas» que passam num dado ponto e não cruzam uma determinada linha recta*

em D e C sejam também rectos. No entanto, Saccheri, não aceitando o quinto postulado, concluiu que existiam, na verdade, três hipóteses:

1. Os ângulos em C e D são ambos rectos.
2. São ambos ângulos obtusos.
3. São ambos ângulos agudos.

Algumas das conclusões deduzidas de (2) e (3) são suficientemente chocantes e vão contra a «intuição». Neste ponto, Saccheri toca o gongo e grita «contradição».

Lambert, o mais ousado e mais expedito dos dois, aguenta mais alguns assaltos e não desiste até descobrir que, dentro deste novo e hipotético sistema, pode provar-se a existência de uma unidade absoluta de comprimento. Depois, argumenta que, uma vez que não pode existir uma unidade absoluta de comprimento, todo o raciocínio foi baseado em premissas falsas.

Bernhard Riemann
1826-1866

Não é nossa intenção delinear aqui o fluxo das descobertas com todas as suas ramificações. Muitos matemáticos contribuíram para elas — Gauss, Lobachevsky, Bolyai e Riemann, para indicar apenas os mais importantes. A descoberta foi acompanhada de muitos mal-entendidos, dúvidas e suspeitas. Parecia estar à beira da loucura. As dores de parto foram intensas. Assim, por exemplo, o pai de Bolyai escreveu-lhe: «Por amor de Deus, por favor, desiste. Teme-a tanto como às paixões dos sentidos, porque também ela pode ocupar todo o teu tempo e privar-te de saúde, sossego e felicidade na vida.»

Descobriu-se que existem, não uma, mas duas geometrias não euclidianas. Hoje em dia, chamam-se geometria de Lobachevsky (ou hiperbólica) e geometria de Riemann (ou elíptica). Em relação ao axioma de Playfair, estas duas geometrias não euclidianas correspondem aos axiomas:

Janos Bolyai
1802-1860

- *Lobachevsky:* dada, num plano, uma linha L e um ponto P fora de L, existem pelo menos duas linhas que passam por P e são paralelas a L;
- *Riemann:* dada, num plano, uma linha L e um ponto P fora de L, não existe nenhuma linha que passe por P e seja paralela a L.

Às diversas geometrias, euclidiana, de Lobachevsky e riemanniana, correspondem três conjuntos distintos de conclusões (teoremas), que são apresentados pormenorizadamente em livros sobre o assunto. Existem fórmulas de medida diferentes e aspectos projectivos diferentes. Uma comparação entre as três é muito interessante. Algumas das diferenças elementares estão resumidas no quadro que se segue.

Tabela comparativa da geometria plana euclidiana e não euclidiana

	Euclidiana	**Lobachevskiana**	**Riemanniana**	
Duas linhas distintas intersectam-se em	pelo menos um	pelo menos um	um (elipse simples) dois (elipse dupla)	ponto pontos
Dada a linha L e o ponto p exterior a L, existe(m)	uma linha e só uma	pelo menos duas linhas	zero linhas	que atravessam P e são paralelas a L
Uma linha	é	é	não é	dividida em duas por um ponto
As linhas paralelas	são equidistantes	nunca são equidistantes	não existem	
Se uma linha intersecta uma de duas linhas paralelas	tem de	pode ou não	—	intersectar a outra
A hipótese de Saccheri válida é a do	ângulo recto	ângulo agudo	ângulo obtuso	
Duas linhas distintas perpendiculares a uma terceira	são paralelas	são paralelas	intersectam-se	
A soma dos ângulos de um triângulo é	igual a	menor do que	maior do que	180°
A área de um triângulo é	independente	proporcional ao defeito	proporcional ao excesso	da soma dos seus ângulos
Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são	semelhantes	congruentes	congruentes	

Fonte: Prenowitz e Jordan, *Basic Concepts of Geometry*

Damos mais dois exemplos. O famoso teorema de Pitágoras tem agora três formas:

- Geometria de Euclides: $c^2 = a^2 + b^2$;
- Geometria de Lobachevsky: $2(e^{c/k} + e^{-c/k}) = (e^{a/k} + e^{-a/k})\ (e^{b/k} + e^{-b/k})$ onde k é uma determinada constante fixa e $e = 2{,}718...$;

Geometria de Riemann: na forma diferencial: $ds^2 = \alpha dx^2 + 2\beta dxdy + \gamma dy^2$ onde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ é positivo definido.

O perímetro da circunferência de raio r é dado pelas fórmulas:

- *Geometria euclidiana:* $C = 2\pi r$;
- *Geometria de Lobachevsky:* $C = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k})$.

A fórmula riemanniana para C não pode exprimir-se em termos simples.

Resta-nos discutir a consistência lógica da geometria não euclidiana. Para isso, substituímos apenas em todo o lado a palavra *recta* pela expressão *círculo máximo,* um círculo formado na superfície de uma esfera pela intersecção desta com um plano que passe pelo centro da esfera. Passamos a encarar os axiomas como afirmações sobre pontos e círculos máximos numa dada esfera. Mais ainda, concordamos em identificar cada par de pontos diametralmente opostos sobre a esfera como um só ponto. Se o leitor quiser, pode imaginar os axiomas da geometria não euclidiana reescritos, com a palavra *recta* substituída em todo o lado por *círculo máximo* e a palavra *ponto* por *par de pontos.* É, então, evidente que todos os axiomas são verdadeiros, pelo menos, se as nossas noções sobre a superfície de uma esfera o forem. De facto, dos axiomas da geometria de Euclides a três dimensões pode provar-se facilmente, como um teorema, que a superfície de uma esfera é uma superfície não euclidiana, no sentido que acabamos de descrever. Por outras palavras, vemos que, se os axiomas da geometria não euclidiana conduzissem a contradições, então, também a habitual geometria euclidiana de esferas o faria. Temos, assim, uma prova *relativa* de consistência; se a geometria euclidiana a três dimensões é consistente, também a geometria não euclidiana a duas dimensões o é. Dizemos que a superfície da esfera euclidiana é um modelo para os axiomas da geometria não euclidiana. (No modelo particular que utilizámos, o postulado das paralelas falha porque não existem linhas paralelas. É também possível construir uma superfície, a «pseudo-esfera», para a qual o postulado das paralelas é falso porque existe mais de uma linha, passando pelo ponto dado, paralela a uma determinada linha.)

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

A. D. Alexandroff, capítulo 17; H. Eves e C. V. Newsom; E. B. Golos; M. J. Greenberg; M. Kline [1972], capítulo 36; W. Prenowitz e M. Jordan; C. E. Sjöstedt.

Teoria de conjuntos não cantoriana

A teoria abstracta de conjuntos sofreu recentemente uma revolução, de certo modo análoga à revolução do século XIX na geometria. Propomo-nos utilizar a história da geometria não euclidiana para elucidarmos o desenvolvimento da teoria não standard de conjuntos.

Georg Cantor
1845-1918

Um conjunto é, naturalmente, uma das ideias mais simples e básicas da matemática, tão simples que faz parte do currículo do ensino primário. Foi, sem dúvida, por essa mesma razão que o seu papel, como conceito mais fundamental da matemática, não foi tornado explícito até à década de 1880. Só nessa altura Georg Cantor fez a primeira descoberta não trivial da teoria dos conjuntos.

Cantor mostrou que faz sentido falar do número de elementos de um conjunto infinito ou, pelo menos, afirmar que dois conjuntos inerentes têm o mesmo número de elementos. Tal como para conjuntos finitos, podemos dizer que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos — a mesma cardinalidade — se pudermos emparelhar os elementos dos dois conjuntos um a um. Se isso for possível, dizemos que os conjuntos são equivalentes.

O conjunto de todos os números naturais pode ser emparelhado com o conjunto de todos os números pares e também com o conjunto de todos os fraccionários. Estes dois exemplos ilustram uma propriedade paradoxal dos conjuntos infinitos: um conjunto infinito pode ser equivalente a um dos seus subconjuntos. Na verdade, prova-se facilmente que um conjunto é infinito se, e só se, é equivalente a algum dos seus subconjuntos próprios.

Tudo isto é interessante, mas não era novo para Cantor. A noção de cardinalidade de conjuntos infinitos só seria interessante se pudesse mostrar-se que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade. Foi esta a primeira grande descoberta de Cantor na teoria dos conjuntos. Através da sua famosa demonstração diagonal, mostrou que o conjunto dos números naturais *não* é equivalente ao conjunto de pontos de um segmento de recta (v. apêndice A).

Assim, existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito. O primeiro, o infinito dos números naturais (e de quaisquer conjuntos a ele equivalentes) chama-se álefe 0 ($\aleph_0$). Conjuntos com a cardinalidade $\aleph_0$ dizem-se contáveis. O segundo tipo de infinito corresponde ao número de

pontos num segmento de recta. A sua cardinalidade é representada por um *c* gótico minúsculo ($\mathfrak{c}$), de «contínuo». *Qualquer* segmento de recta, de comprimento arbitrário, tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. O mesmo se passa com qualquer rectângulo no plano, qualquer cubo no espaço, ou até, na verdade, para todo o espaço ilimitado de dimensão *n,* quer *n* seja 1, 2, 3 ou 1000.

Depois de se dar o primeiro passo na cadeia de infinitos, há que naturalmente dar o próximo. Encontramos a noção do conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto inicial. Se esse conjunto se chamar *A,* o novo chamar-se-á conjunto das partes de *A* e será representado por 2^A. E. tal como obtemos o conjunto potência 2^A a partir de *A,* podemos, a seguir, obter $2^{(2^A)}$ a partir de 2^A, e assim sucessivamente.

Cantor provou que, quer *A* seja finito quer seja infinito, 2^A nunca é equivalente a *A.* Deste modo, o processo de formação do conjunto de todos os subconjuntos gera uma cadeia interminável de conjuntos infinitos cada vez maiores e não equivalentes. Em particular, se *A* representar os números naturais, então, prova-se facilmente que 2^A (o conjunto de todos os conjuntos de números naturais) é equivalente ao contínuo (o conjunto de todos os pontos num segmento de recta). Resumindo:

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Neste ponto, poderá surgir uma dúvida ao leitor. Será que existe um conjunto infinito com cardinalidade *entre* $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$? Isto é, existirá num segmento de recta um conjunto infinito de pontos que não seja equivalente a todo o segmento nem ao conjunto de números naturais?

Este problema foi também estudado por Cantor, que, todavia, não conseguiu encontrar nenhum conjunto nestas condições. Concluiu — ou melhor, conjecturou — que não existe tal coisa. Esta ideia de Cantor ficou conhecida como a «hipótese do contínuo». A sua demonstração ou negação estava em primeiro lugar na lista dos problemas matemáticos por resolver, elaborada por David Hilbert em 1900. Só em 1963 foi, finalmente, resolvido. No entanto, essa resolução foi completamente diferente da que Hilbert tinha em mente.

Para atacar este problema, não era possível partir da definição cantoriana de conjunto como «qualquer colecção de objectos, bem definidos e distintos, da nossa intuição ou pensamento». De facto, esta definição, que parece tão transparente, mostrou esconder algumas armadilhas traiçoeiras. O uso livre da noção de conjunto intuitiva, à Cantor, pode levar a contradições. A teoria de conjuntos só pode servir como uma base segura para a matemática se empregarmos uma abordagem mais sofisti-

cada, afastada das antinomias, nome pelo qual as contradições do tipo proposto por Russell ficaram mais tarde conhecidas.

Já tinha acontecido antes paradoxos, nada bem-vindos, virem intrometer-se numa teoria matemática aparentemente clara. Existem os paradoxos de Zenão, que mostraram aos Gregos as inesperadas complexidades dos conceitos intuitivos de linhas e pontos. Podemos fazer uma analogia: tal como Russell encontrou contradições no uso sem restrições do conceito intuitivo de conjunto, também Zenão as encontrou no uso sem restrições dos conceitos de «linha» e «ponto».

No seu início, com Tales, no século VI a. C., a geometria grega baseava-se num conceito intuitivo, não especificado, de «linha» e «ponto». Cerca de 300 anos depois, Euclides deu a estes conceitos um tratamento axiomático. Para Euclides os objectos geométricos eram ainda entidades reais, conhecidas intuitivamente, mas, enquanto objectos de raciocínio geométrico, eram especificados por certas afirmações não demonstradas («axiomas» ou «postulados»). Estas formavam a base a partir da qual todas as outras propriedades tinham de ser demonstradas sob a forma de «teoremas». Não sabemos se, e em que grau, estes desenvolvimentos foram uma resposta aos paradoxos do tipo dos de Zenão. No entanto, não há dúvida de que, para os Gregos, a geometria se tornou muito mais fiável por depender (pelo menos segundo eles acreditavam e queriam) apenas de inferências lógicas baseadas num pequeno número de pressupostos apresentados claramente.

O desenvolvimento análogo para a teoria de conjuntos demorou, não 300 anos, mas apenas 35. Se Cantor desempenhou o papel de Tales — o fundador da disciplina, que podia basear-se apenas no raciocínio intuitivo —, então, o papel de Euclides coube a Ernst Zermelo, que em 1908 fundou a teoria axiomática de conjuntos. É evidente que Euclides foi apenas um de uma longa série de geómetras gregos que criaram a «geometria euclidiana», tal como Zermelo foi apenas o primeiro de meia dúzia de grandes nomes na criação da teoria axiomática de conjuntos.

Tal como Euclides tinha partido de uma lista de certas propriedades de pontos e linhas e considerava teoremas provados apenas aqueles que podiam obter-se desses axiomas (e não a partir de qualquer argumento intuitivo), também na teoria axiomática de conjuntos estes são considerados objectos indefinidos, que obedecem a um certo número de axiomas. É claro que queremos estudar conjuntos (ou linhas, conforme o caso) e, assim, não escolhemos os axiomas arbitrariamente, mas de acordo com a nossa noção intuitiva de conjunto ou linha. Contudo, a intuição não desempenha mais qualquer papel formal; só são aceites as proposições que se demonstram a partir dos axiomas. O facto de os objectos descritos

por estes axiomas existirem ou não na realidade é irrelevante para o processo de dedução formal (embora seja essencial na descoberta).

Concordamos em agir como se os símbolos para «linha», «ponto» e «ângulo» em geometria, ou os símbolos para «conjunto», «é um subconjunto de», e assim sucessivamente, em teoria de conjuntos, fossem desenhos no papel, que podem ser rearranjados apenas segundo uma determinada lista de regras (axiomas e regras de inferência). Só são aceites como teoremas as afirmações obtidas de acordo com tais manipulações dos símbolos. (Na prática, só são aceites as proposições que claramente poderiam ser obtidas dessa maneira se nos déssemos ao trabalho e tivéssemos tempo.)

Na história da geometria houve um postulado particularmente importante. Foi o postulado das paralelas, que diz que através de um determinado ponto só pode passar uma recta paralela a uma outra dada (v. a discussão sobre geometria não euclidiana mais atrás, neste capítulo). O problema de esta afirmação ser vista como um axioma reside no facto de ela não ser tão evidente como seria desejável para os fundamentos de uma teoria matemática. Na realidade, rectas paralelas definem-se como linhas que nunca se encontram, mesmo que prolongadas indefinidamente («até ao infinito»). Uma vez que quaisquer linhas por nós desenhadas num papel ou num quadro têm um comprimento finito, este é um axioma que, dada a sua natureza, não pode ser verificado por observação directa dos nossos sentidos. Mesmo assim, desempenha um papel indispensável na geometria euclidiana. Durante muitos séculos, um dos problemas mais importantes em geometria era provar o postulado das paralelas, mostrando que podia ser obtido como um teorema a partir dos outros axiomas, mais evidentes, de Euclides.

Acontece que, em teoria abstracta de conjuntos, também existia um axioma que alguns matemáticos tinham dificuldade em aceitar. Era o axioma da escolha, que afirma o seguinte: Se α é uma qualquer colecção de conjuntos $\{A, B, \ldots\}$, e nenhum dos conjuntos de α é vazio, então existe um conjunto Z que contém precisamente um elemento de cada conjunto de α. Por exemplo, se α contém dois elementos, o conjunto de todos os triângulos e o conjunto de todos os quadrados, então α satisfaz claramente o axioma da escolha. Escolhemos apenas um determinado triângulo e um determinado quadrado, os quais serão os elementos de Z.

A maioria das pessoas acha o axioma da escolha, tal como o postulado das paralelas, intuitivamente muito plausível. A dificuldade reside na grande latitude de α: «qualquer» colecção de conjuntos. Como vimos, existem cadeias intermináveis de conjuntos infinitos cada vez maiores. Para tão gigantesca colecção de conjuntos não existe uma maneira de

escolher os elementos de Z um por um de todos os conjuntos pertencentes a α. Se aceitarmos o axioma da escolha, essa aceitação será apenas um acto de fé de que uma escolha é possível, tal como a aceitação do postulado das paralelas é um acto de fé em relação ao comportamento de linhas rectas quando prolongadas até ao infinito. Verifica-se que, partindo do aparentemente inocente axioma da escolha, é possível chegar a algumas conclusões inesperadas e extremamente convincentes. Por exemplo, conseguimos utilizar raciocínio indutivo para provar proposições acerca de elementos de *qualquer* conjunto de um modo semelhante ao uso da indução matemática para demonstrar teoremas sobre os números naturais 1, 2, 3, e assim sucessivamente.

O axioma da escolha teve um papel especial na teoria de conjuntos. Muitos matemáticos pensavam que o seu uso deveria ser evitado sempre que possível. Tal forma da teoria axiomática de conjuntos, na qual o axioma da escolha *não* é assumido como verdadeiro ou falso, seria aquela que a maioria dos matemáticos estaria mais preparada para aceitar. No que se segue utilizamos a expressão *teoria de conjuntos restrita* para um sistema de axiomas deste tipo. E usamos a expressão *teoria de conjuntos standardizada* para a teoria baseada no conjunto total de axiomas propostos por Zermelo e Abraham Fraenkel: teoria de conjuntos restrita *mais* axioma da escolha.

Esta área foi profundamente desenvolvida por Kurt Gödel em 1938. Gödel é conhecido sobretudo pelos seus grandes teoremas da «não completude» de 1930-1931. Mas aqui referimo-nos a trabalhos posteriores que não são bem conhecidos pelos não matemáticos. Em 1938, Gödel provou o seguinte resultado fundamental: se a teoria de conjuntos restrita for consistente, então também o é a teoria de conjuntos standard. Por outras palavras, o axioma da escolha não é mais perigoso do que os outros axiomas; se for encontrada uma contradição na teoria de conjuntos standard, então, tem de existir já uma contradição escondida na teoria de conjuntos restrita.

Kurt Gödel
1906-1978

Mas isso não foi tudo o que Gödel provou. Lembramos ao leitor a «hipótese do contínuo» de Cantor, que diz que não existe nenhum cardinal infinito maior do que $\aleph_0$ e mais pequeno do que c. Gödel também mostrou que podemos incluir na teoria de conjuntos, com segurança, a hipótese do contínuo como um axioma adicional; isto é, se a hipótese do contínuo mais a teoria de conjuntos restrita implicarem uma contradição,

então, de novo, a teoria restrita já deverá conter uma contradição escondida à partida. Esta foi uma meia solução para o problema de Cantor; não foi uma *prova* da hipótese do contínuo, apenas uma prova de que essa hipótese não pode ser invalidada.

Para compreendermos como é que Gödel alcançou os seus resultados temos de perceber o que significa um modelo para um sistema axiomático. Regressemos por um momento aos axiomas da geometria plana. Se admitirmos estes axiomas, incluindo o postulado das paralelas, temos os axiomas da geometria de Euclides; se, por outro lado, mantivermos todos os axiomas menos o postulado das paralelas, que substituímos pela sua negação, obtemos os axiomas de uma geometria não euclidiana. Para ambos os sistemas de axiomas — euclidiano e não euclidiano — perguntamos: será que estes axiomas podem conduzir a uma contradição?

Fazer esta pergunta em relação ao sistema euclidiano pode não parecer razoável. Como poderia estar alguma coisa errada com a nossa geometria da escola secundária, que nos é familiar há 2000 anos? Por outro lado, para o não matemático existe certamente algo de suspeito acerca do segundo sistema axiomático, com a sua negação do intuitivamente plausível postulado das paralelas. Contudo, do ponto de vista de um matemático do século xx, os dois tipos de geometria estão em pé de igualdade. Ambos são, por vezes, aplicáveis ao mundo físico real e ambos são consistentes, num sentido relativo.

A invenção da geometria não euclidiana, e o reconhecimento de que a sua consistência deriva da consistência da geometria euclidiana, foi o trabalho de muitos e grandes matemáticos do século xix; mencionamos o nome de Bernhard Riemann em particular. Só no século xx foi posta em causa a consistência da própria geometria euclidiana.

Esta questão foi levantada e resolvida por David Hilbert. A solução de Hilbert foi uma simples aplicação da ideia de um sistema de coordenadas. A cada ponto do plano podemos associar um par de números: as suas coordenadas x e y. Deste modo, a cada linha ou círculo podemos associar uma equação: uma relação entre as coordenadas x e y que só é verdadeira para pontos sobre essa linha ou círculo. Assim estabelecemos uma correspondência entre geometria e álgebra elementar. Para cada proposição de uma dessas áreas existe uma proposição correspondente na outra. Isto implica que os axiomas da geometria euclidiana só podem levar a uma contradição se as regras da álgebra elementar — as propriedades dos números reais normais — puderem levar a uma contradição. Aqui temos de novo uma prova relativa de consistência. A geometria não euclidiana seria consistente se a geometria euclidiana o fosse; agora a geometria euclidiana será consistente se a álgebra elementar o for. A esfera

euclidiana era um modelo para o plano não euclidiano; o conjunto de pares de coordenadas é, por sua vez, um modelo para o plano euclidiano.

Com estes exemplos, podemos dizer que a demonstração de Gödel, da consistência relativa do axioma da escolha e da hipótese do contínuo, é análoga à prova de Hilbert da consistência relativa da geometria euclidiana. Em ambos os casos, a teoria de conjuntos standard foi justificada em termos de uma teoria mais elementar. É claro que nunca ninguém teve dúvidas sérias acerca da fiabilidade da geometria euclidiana, ao passo que matemáticos proeminentes como L. E. J. Brouwer, Hermann Weyl e Henri Poincaré tiveram grandes dúvidas sobre o axioma da escolha. Neste sentido o resultado de Gödel teve um impacto e um significado muito maiores.

O desenvolvimento análogo à geometria não euclidiana — aquilo a que poderíamos chamar teoria de conjuntos não cantoriana — só se iniciou em 1963, com o trabalho de Paul J. Cohen. Que significa «teoria de conjuntos não cantoriana»? Tal como as geometrias euclidiana e não euclidiana utilizam os mesmos axiomas, com a excepção do postulado das paralelas, também as teorias de conjuntos standard («cantoriana») e não standard («não cantoriana») diferem apenas num axioma. A teoria de conjuntos não cantoriana parte dos axiomas da teoria de conjuntos restrita mais uma forma ou outra da negação do axioma da escolha. Em particular, podemos admitir como axioma a negação da hipótese do contínuo. Deste modo, como explicaremos, existe agora uma solução completa para o problema do contínuo. À descoberta de Gödel de que não pode provar-se a negação da hipótese do contínuo junta-se o facto de que a sua veracidade também não pode ser provada.

Tanto o resultado de Gödel como as novas descobertas necessitam da construção de um modelo, tal como as provas, que descrevemos, de consistência da geometria necessitaram de um modelo. Em ambos os casos (trabalho de Gödel e novas descobertas), queremos provar que, se a teoria de conjuntos restrita é consistente, então também o é a teoria de conjuntos standard (ou a teoria não standard).

A ideia de Gödel era construir um modelo para a teoria restrita e provar que, nesse modelo, o axioma da escolha e a hipótese do contínuo eram teoremas. Raciocinou do seguinte modo: usando apenas os axiomas da teoria de conjuntos restrita, temos a garantia, primeiro, da existência de, pelo menos, um conjunto (o conjunto vazio), pelo axioma 2; depois, pelos axiomas 3 e 4, temos a garantia da existência de conjuntos finitos cada vez maiores; a seguir, pelo axioma 5, da existência de um conjunto infinito; em seguida, pelo axioma 7, da existência de uma sequência infindável de conjuntos infinitos (não equivalentes) cada vez maiores, e

assim por diante. Essencialmente, desta maneira, Gödel especificou uma classe de conjuntos pelo modo como eles são construídos, em passos sucessivos, a partir de conjuntos mais simples. A estes chamou «conjuntos construtíveis»; a sua existência era garantida pelos axiomas da teoria de conjuntos restrita. A seguir demonstrou que, no contexto dos conjuntos construtíveis, o axioma da escolha e a hipótese do contínuo podem ser provados. Isto é, primeiro, qualquer que seja a colecção de conjuntos construtíveis (A, B, ...), pode escolher-se um conjunto construtível Z que conterá pelo menos um elemento de cada A, B, etc. Este é o axioma da escolha, que aqui pode ser mais apropriadamente designado por «teorema da escolha». Segundo, se A é um qualquer conjunto construtível infinito, então, não existe nenhum conjunto construtível «entre» A e 2^A (maior do que A, mais pequeno do que o conjunto potência de A e não equivalente a nenhum deles). Se A for o primeiro cardinal infinito, esta última afirmação será a hipótese do contínuo.

Ficou assim demonstrada uma «hipótese do contínuo generalizada» no caso da teoria de conjuntos *contrutíveis*. O trabalho de Gödel acabaria completamente com estas duas questões se estivéssemos preparados para adoptar o axioma de que apenas existem conjuntos construtíveis. Porque não fazê-lo? Porque sentimos que não é razoável insistirmos em que um conjunto tem de ser construído de acordo com uma determinada fórmula, *qualquer* que esta seja, para ser considerado um conjunto genuíno. Assim, em teoria de conjuntos normal (que não é necessariamente construtível), nem o axioma da escolha nem a hipótese do contínuo foram demonstrados: Pelo menos algo era certo: qualquer deles poderia ser assumido sem causar qualquer contradição, a não ser que os axiomas «seguros» da teoria restrita já sejam contraditórios. Qualquer contradição que causem tem de estar presente na teoria de conjuntos construtíveis, que é um modelo para a teoria de conjuntos normal. Por outras palavras, sabia-se que aquelas proposições não podiam ser negadas a partir dos outros axiomas, mas não se sabia se poderiam ser demonstradas.

Neste ponto, torna-se particularmente ilustrativa a analogia com o postulado das paralelas da geometria de Euclides. Os axiomas de Euclides foram considerados consistentes, sem ninguém duvidar, até muito recentemente. A questão que interessava aos geómetras era a de saberem se os axiomas eram ou não independentes, isto é, se podia provar-se o postulado das paralelas com base nos outros axiomas. Muitos geómetras tentaram demonstrar o postulado das paralelas mostrando que a sua negação conduzia a absurdos. Todavia, não chegaram a absurdos, mas à descoberta de geometrias «fantásticas», que tinham tanta consistência lógica quanto a geometria de Euclides «do mundo real». Só após tal ter

acontecido é que se aperceberam de que a geometria não euclidiana a duas dimensões correspondia à geometria euclidiana normal de certas superfícies curvas (esferas e pseudo-esferas).

O passo análogo em teoria de conjuntos seria negar o axioma da escolha ou a hipótese do contínuo. Queremos com isto dizer que esse passo seria demonstrar que tal negação é consistente com a teoria de conjuntos restrita, do mesmo modo que Gödel provou que a afirmação o era. Esta demonstração foi levada a cabo com sucesso em anos recentes, originando, no domínio da lógica matemática, uma enorme actividade cujo resultado final é imprevisível.

Uma vez que se trata de uma questão de provar a consistência relativa de um sistema de axiomas, pensamos naturalmente em construir um modelo. Como vimos, a consistência relativa da geometria não euclidiana foi estabelecida quando se mostrou que superfícies euclidianas tridimensionais são modelos para a geometria bidimensional não euclidiana. De modo semelhante, para provarmos a legitimidade de uma teoria de conjuntos não cantoriana, na qual o axioma da escolha ou a hipótese do contínuo são falsos, temos de utilizar os axiomas da teoria de conjuntos restrita para construirmos um modelo onde a negação do axioma da escolha ou a negação da hipótese do contínuo possam ser provadas como teoremas.

Temos de confessar que a construção deste modelo é delicada e complexa. Talvez tenha de esperar. Na teoria de conjuntos construtíveis de Gödel, o seu modelo da teoria de conjuntos cantoriana, o objectivo era criar algo essencialmente idêntico à nossa noção intuitiva de conjunto, mas mais fácil de trabalhar matematicamente. O nosso objectivo agora consiste em criarmos um modelo de uma coisa estranha e não intuitiva, usando a ferramenta familiar da teoria de conjuntos restrita.

Em vez de encolhermos os ombros e dizermos que é impossível descrever este modelo de um modo não técnico, vamos, pelo menos, tentar dar uma visão descritiva de uma ou duas das ideias principais aqui envolvidas. O nosso ponto de partida é a teoria de conjuntos normal (sem o axioma da escolha). Queremos apenas provar a consistência num sentido relativo da teoria de conjuntos não cantoriana. Do mesmo modo que os modelos da geometria não euclidiana provam que esta é consistente se a geometria euclidiana o for, também provaremos que, se a teoria de conjuntos restrita for consistente, continuará a sê-lo se lhe acrescentarmos a afirmação «o axioma da escolha é falso» ou a afirmação «a hipótese do contínuo é falsa». Podemos admitir que temos como ponto de partida um modelo para a teoria de conjuntos restrita. Chamemos a este modelo *M*, que pode ser visto como a classe de Gödel de conjuntos construtíveis.

Do trabalho de Gödel sabemos que, para que o axioma da escolha ou a hipótese do contínuo falhem, temos de acrescentar a *M*, pelo menos, um conjunto não construtível. Como fazemos isso? Introduzimos a letra *a* para representar um objecto a ser acrescentado a *M;* fica por determinar que tipo de objecto é *a*. Acrescentando *a*, temos também de acrescentar tudo o que possa ser formado a partir de *a*, pelas operações permitidas da teoria de conjuntos restrita: a união de dois ou mais conjuntos para formar um novo, a construção do conjunto potência, e assim sucessivamente. À nova colecção de conjuntos gerada deste modo por $M + a$ chamamos *N*. O problema está em escolher *a* de modo que (1) *N* seja um modelo para a teoria de conjuntos restrita, como *M* o era à partida, e (2) *a* não seja construtível em *N*. Só se tal for possível é que pode haver esperança de negar o axioma da escolha ou a hipótese do contínuo.

Podemos ter uma vaga ideia do que há a fazer perguntando o que terá feito um geómetra de 1850 quando tentava descobrir a pseudo-esfera. Muito grosseiramente, é como se tivesse começado com uma curva *M* no plano euclidiano, pensasse num ponto *a* fora desse plano e depois juntasse esse ponto *a* a todos os pontos de *M*. Uma vez que *a* não pertence ao plano de *M*, a superfície resultante *N* não será certamente o mesmo que o plano euclidiano. Assim, é possível imaginar que, com engenho e capacidade técnica suficientes, pode mostrar-se que essa superfície é, na realidade, um modelo de uma geometria não euclidiana.

O procedimento análogo em teoria de conjuntos não cantoriana será escolher o novo conjunto *a* não construtível e depois gerar um novo modelo *N* contendo todos os conjuntos obtidos através das operações da teoria de conjuntos restrita aplicadas a *a* e aos elementos de *M*. Se tal for possível, prova-se que pode negar-se o axioma da construtibilidade. Uma vez que Gödel mostrou que a construtibilidade implica o axioma da escolha e a hipótese do contínuo, este é o primeiro passo necessário para a negação de qualquer daquelas duas proposições.

Para conseguirmos realizar este primeiro passo, temos de demonstrar duas coisas: *a* pode ser escolhido de modo a ser não construtível não apenas em *M*, mas também em *N*, e *N*, tal como *M*, é um modelo para a teoria de conjuntos restrita. Para especificarmos *a*, tomamos um caminho tortuoso. Imaginamos que vamos fazer uma lista de todas as proposições possíveis acerca de *a*, como um conjunto em *N*. Então *a* será especificado se dermos uma regra através da qual possamos determinar se alguma dessas proposições é ou não verdadeira.

A ideia crucial consiste em saber escolher *a* de modo a que seja um elemento «genérico», ou seja, escolher *a* de tal maneira que só sejam afirmações verdadeiras para *a* aquelas que forem verdadeiras para quase

todos os conjuntos de *M*. Esta é uma noção paradoxal. Cada conjunto de *M* tem tanto propriedades específicas particulares, que o identificam, quanto propriedades típicas gerais, que partilha com quase todos os outros conjuntos de *M*. Acontece que é possível fazer, com precisão, esta distinção entre propriedades específicas e genéricas de um modo perfeitamente explícito e formal. Logo, ao escolhermos *a* de forma a ser um conjunto genérico (conjunto que não tem propriedades especiais que o distingam de qualquer outro conjunto em *M*), segue-se imediatamente que *N* ainda é um modelo para a teoria de conjuntos restrita. O novo elemento *a*, que introduzimos, não tem quaisquer propriedades problemáticas especiais que possam estragar o modelo *M*, donde partimos. Simultaneamente *a* é um conjunto não construtível. Todos os conjuntos construtíveis têm um carácter especial — o processo através do qual foram construídos — e o nosso *a* não tem precisamente essa individualidade.

Para construirmos um modelo no qual a hipótese do contínuo seja falsa, temos de acrescentar a *M*, não um, mas muitos elementos novos. De facto, temos de lhe acrescentar um número infinito de elementos novos. Na realidade é possível fazê-lo de modo a que os novos elementos tenham cardinalidade

$$\aleph_2 = 2^{(2^{\aleph_0})}$$

no contexto do modelo *M*. Novamente uma simples analogia geométrica pode ser útil: para uma criatura bidimensional a viver numa superfície não euclidiana seria impossível perceber que o seu mundo faz parte de um espaço euclidiano a três dimensões. No caso presente, nós, que estamos fora de *M*, podemos perceber que apenas juntamos uma infinidade contável de elementos novos. No entanto, estes novos conjuntos são tais que não podem ser contados através de nenhum método disponível no próprio *M*. Obtemos então um novo modelo *N′* no qual a hipótese do contínuo é falsa. Os novos elementos, que em *N′* correspondem aos números reais (isto é, pontos num segmento de recta), têm cardinalidade maior do que $2^{\aleph_0}$, havendo agora um cardinal infinito — nomeadamente $2^{\aleph_0}$ — que é maior do que $\aleph_0$ e ao mesmo tempo menor do que $\mathfrak{c}$, uma vez que no nosso modelo *N′*, $\mathfrak{c}$ é igual a

$$2^{(2^{\aleph_0})}$$

Uma vez que podemos construir um modelo da teoria de conjuntos no qual a hipótese do contínuo é falsa, também podemos acrescentar à nossa teoria de conjuntos restrita o pressuposto dessa falsidade, sem que daí

possa advir qualquer contradição que já não existisse à partida. Na mesma linha de pensamento, podemos construir modelos para uma teoria de conjuntos na qual o axioma da escolha seja falso. É possível até sermos bastante específicos em relação a quais os conjuntos infinitos cuja «escolha» é possível e quais são «demasiado grandes» para isso.

Enquanto Gödel chegou aos seus resultados com um único modelo (os conjuntos construtíveis), em teoria de conjuntos não cantoriana dispomos, não de um, mas de muitos modelos, cada um construído com um objectivo particular em mente. Talvez mais importante do qualquer modelo seja a técnica que permite construí-los a todos: a noção de «genérico» e o conceito associado de «forçado». Muito grosseiramente, pode dizer-se que os conjuntos genéricos só têm as propriedades que são «forçados» a ter para serem como um conjunto*. Para decidirmos se *a* é forçado ou não a ter uma certa propriedade, temos de estudar todo o *N*. Porém, *N* não fica totalmente definido até especificarmos o *a!* A descoberta de como transformar este argumento, aparentemente circular, num raciocínio não circular é outro elemento-chave na nova teoria.

No *Handbook of Mathematical Logic* (editado por J. Barwise) há uma discussão de J. P. Burgess acerca das mais recentes ramificações do método de Cohen. Burgess escreveu:

> O método de Cohen foi desde então aplicado para demonstrar a consistência de hipóteses em aritmética transfinita, cálculo combinatório infinito, teoria das medidas, topologia da recta real, álgebra universal e teoria de modelos.

A veracidade da hipótese do contínuo não foi ainda decidida. Cohen e Gödel provaram que os axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo-Frankel não são suficientes para a decidirem. Se acreditarmos que os conjuntos são uma realidade, então, podemos estar convencidos de que a hipótese do contínuo é verdadeira ou falsa. Neste caso, o que temos de fazer é descobrir um novo axioma que seja intuitivamente plausível e, ao mesmo tempo, suficientemente forte para arrumar a questão. Ninguém descobriu ainda um tal axioma; portanto, a escolha é nossa: podemos adoptar a hipótese do contínuo ou rejeitá-la.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. Burgess; P. J. Cohen [1966]; K. Gödel.

---

* *Setlike* no original. *(N. do T.)*

Apêndice A

O PROCESSO DIAGONAL DE CANTOR

Aqui apresentamos uma versão simples deste processo. Consideremos todas as funções f definidas sobre os inteiros 1, 2, 3 ...

Teorema: não é possível fazer uma lista com todas estas funções.

Demonstração: suponhamos que é possível. Então, tem de existir uma primeira função nessa lista. Seja f_1. Existirá uma segunda função f_2, etc. Agora, para cada número n, com n a tomar os valores 1, 2, 3 ..., consideremos os números $f_n(n) + 1$. Esta sequência de números é, ela própria, uma função definida sobre os inteiros e, assim, pela nossa premissa, tem de aparecer algures na lista — ou seja, é um certo f_k. Por definição, $f_k(n) = f_n(n) + 1$, e isto é válido para $n = 1, 2, 3$ ... Em particular é válido para $n = k$, o que dá $f_k(k) = f_k(k) + 1$. Assim, $0 = 1$, uma contradição.

O processo diagonal desempenha um papel particularmente relevante na teoria de funções recursivas.

Análise não standard

A análise não standard, um novo ramo da matemática, inventado pelo lógico Abraham Robinson, inicia um novo estágio no desenvolvimento de vários paradoxos antigos e famosos. Robinson fez renascer a noção de «infinitesimal» — um número que é infinitamente pequeno, mas maior do que zero. Este conceito tem raízes que se prolongam até à antiguidade. Para a análise tradicional, ou «standard», esse conceito parecia descaradamente contraditório. No entanto, foi uma importante ferramenta na mecânica e na geometria, pelo menos desde o tempo de Arquimedes.

Abraham Robinson
1918-1974

No século XIX os infinitésimos foram afastados da matemática definitivamente, ou pelo menos assim parecia. Para corresponder às exigências da lógica, o cálculo infinitesimal de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz foi reformulado por Karl Weierstrass sem infinitésimos. Mas hoje é a lógica matemática, na sua sofisticação e poder contemporâneo, que faz reviver o infinitésimo e o tornou outra vez aceitável. Num certo sentido, Robinson reabilitou o abandono descuidado da matemática do

século XVIII, em oposição ao rigor extremo do século XIX, contribuindo com um novo capítulo na guerra interminável entre finito e infinito, contínuo e descontínuo.

Nas controvérsias sobre o infinitesimal que acompanharam o desenvolvimento do cálculo, a geometria de Euclides era o padrão em relação ao qual as teorias modernas eram comparadas. Na teoria de Euclides, tanto o infinito como o infinitesimal foram deliberadamente excluídos. Lemos em Euclides que um ponto é aquilo que tem posição, mas não tem grandeza. Esta definição já foi considerada sem conteúdo, mas talvez seja apenas um compromisso para não utilizar argumentos de infinitésimos. Foi uma rejeição de conceitos anteriores do pensamento grego. O atomismo de Demócrito não se referia apenas à matéria, mas também ao tempo e ao espaço. Porém, quando os argumentos de Zenão tornaram insustentável a noção de tempo como uma sucessão de instantes, e a noção de linha recta como uma sucessão de «indivisíveis», Aristóteles, o fundador da lógica sistemática, baniu da geometria o infinitamente grande e pequeno.

Aqui está um exemplo típico do uso de argumentos de infinitésimos na geometria:

> Desejamos encontrar a relação entre a área de um círculo e a sua circunferência. Por simplicidade consideramos que o raio do círculo é 1. Podemos imaginar o círculo como sendo composto por infinitos segmentos de recta, todos iguais e infinitamente pequenos. O círculo é então a soma de triângulos infinitesimais, todos com altura 1. Para um triângulo a área é dada por metade da base vezes a altura. Deste modo, a soma das áreas dos triângulos é metade da soma das bases. Mas a soma das áreas dos triângulos é a área do círculo, e a soma das bases dos triângulos é a sua circunferência. Assim, a área do círculo de raio 1 é igual a metade da sua circunferência.

Este argumento, que Euclides recusaria, foi publicado no século XV por Nicolau de Cusa. Naturalmente, a conclusão é verdadeira, mas não é difícil encontrar objecções ao argumento. A noção de triângulo com uma base infinitamente pequena é, no mínimo, ténue. Decerto a base de um triângulo deve ter um comprimento, zero ou maior do que zero. Se for zero, então a área será zero, e, não importando quantos termos somamos, o resultado será sempre zero. Por outro lado, se é maior do que zero, por mais pequeno que seja, obtemos uma soma infinita ao somarmos termos infinitos. Em nenhum dos casos, conseguimos obter um círculo com circunferência finita como uma soma de partes infinitas iguais.

A essência desta negação é a afirmação de que mesmo um número muito pequeno, diferente de zero, se torna arbitrariamente grande quando

somado a si próprio vezes suficientes. Como esta afirmação foi explicitada pela primeira vez por Arquimedes, chama-se a propriedade arquimediana dos números reais. Um infinitésimo, a existir, seria precisamente um número não arquimediano: um número maior do que zero, que, no entanto, permaneceria menor do que (por exemplo) 1, não interessando quantas vezes (em número finito) fosse somado a si próprio. Arquimedes, trabalhando na tradição de Aristóteles e de Euclides, dizia que todos os números são arquimedianos; não existem infinitésimos. Por outro lado, Arquimedes era também um filósofo natural, um engenheiro e um físico. Usou os infinitésimos e a sua intuição física para resolver problemas da geometria das parábolas. Assim, uma vez que os infinitésimos «não existem», deu uma prova «rigorosa» dos seus resultados, usando o «método da exaustão», que assenta num argumento indirecto e em construções puramente finitas. A prova rigorosa é dada no seu tratado *Sobre a Quadratura da Parábola,* que é conhecido desde a antiguidade. O uso de infinitésimos, que na realidade serviram para descobrir a resposta, está explícito numa publicação chamada *Sobre o Método,* desconhecida até à sua sensacional descoberta em 1906.

Arquimedes
c. 287 a. C.-212 a. C.

O método de exaustão de Arquimedes, que evita os infinitésimos, está, no seu espírito, perto do método de *épsilon-delta,* utilizado, no século XIX, por Weierstrass e seguidores para remover os métodos infinitesimais da análise. É fácil explicá-lo, referindo-nos ao nosso exemplo do círculo como um polígono com lados infinitos. Pretendemos uma prova lógica aceitável da fórmula «a área de um círculo com raio de uma unidade é igual a metade da circunferência», descoberta através de um argumento não aceitável de um ponto de vista lógico.

Raciocinamos do seguinte modo: a fórmula afirma a igualdade de duas quantidades associadas a um círculo de raio 1: a sua área e metade da sua circunferência. Assim, se a fórmula for falsa, uma destas quantidades será maior do que a outra. Seja A o número positivo obtido subtraindo a quantidade menor da maior. Podemos circunscrever o círculo por um polígono regular, com tantos lados quantos quisermos. Como o polígono é composto por um número finito de triângulos finitos, com altura um, sabemos que a área é metade do perímetro. Aumentando o número de lados suficientemente, podemos fazer com que a diferença de áreas entre o polígono e o círculo seja menor do que metade de A (qualquer que seja este valor); ao mesmo tempo, a diferença entre os

perímetros do polígono e do círculo será também menor do que metade de *A*. Mas então a área e o semiperímetro do círculo têm de diferir por um valor inferior a *A*, o que contradiz a suposição inicial. Logo, a hipótese de partida é impossível e *A* tem de ser zero, tal como queríamos demonstrar.

Este argumento é impecavelmente lógico. Porém, comparado com a simplicidade da primeira análise, existe algo esquisito, desnecessário e mesmo pedante relacionado com ele. Afinal, se o uso de infinitésimos fornece a resposta certa, essa análise não terá de ser válida em algum sentido? Mesmo não conseguindo justificar os conceitos empregues, como pode verdadeiramente estar errada se funciona?

Tal defesa do infinitesimal não foi feita por Arquimedes. Na verdade, no livro *Sobre o Método*, ele tem o cuidado de explicar que «o facto aqui afirmado não é na realidade demonstrado pelo argumento utilizado» e que uma prova rigorosa havia sido publicada separadamente. Por outro lado, Nicolau de Cusa, cardeal da Igreja, preferia raciocinar com quantidades infinitas, uma vez que acreditava que o infinito era «a fonte, os meios e ao mesmo tempo o objectivo inatingível de todo o conhecimento». Johannes Kepler, um dos fundadores da ciência moderna, seguiu o misticismo de Nicolau de Cusa. Em 1612, num trabalho hoje menos conhecido do que as suas descobertas em astronomia, Kepler usou infinitésimos para encontrar as melhores proporções para um tonel de vinho. Não se apoquentou com as contradições do seu método; como se baseava na inspiração divina, escreveu que «a Natureza ensina a geometria apenas por instinto, mesmo sem raciocínio». Mais importante, as suas fórmulas para os tonéis de vinho estão correctas.

Jakob Bernoulli
1654-1705

Johann Bernoulli
1667-1748

O mais famoso místico matemático foi, sem dúvida, Blaise Pascal. Em resposta aos seus contemporâneos, que recusavam o raciocínio com quantidades infinitesimais, Pascal gostava de dizer que o coração intervém para tornar o trabalho claro. Pascal olhava para o infinitamente grande e para o infinitamente pequeno como mistérios, algo que a Natureza apresentava ao homem, não para ele descobrir, mas para admirar.

A força total do pensamento infinitesimal apareceu com as gerações depois de Pascal: Newton, Leibniz, os irmãos Bernoulli (Jakob e

Johann) e Leonhard Euler. Os teoremas fundamentais do cálculo foram descobertos por Newton e Leibniz nas décadas de 1660 e 1670. O primeiro livro de estudo sobre o cálculo foi escrito em 1696 pelo marquês de L'Hôpital, discípulo de Leibniz e de Johann Bernoulli. Nesse livro, afirma desde o início, como axioma, que duas quantidades que difiram por um infinitésimo podem ser consideradas iguais. Por outras palavras, as duas quantidades são ao mesmo tempo consideradas iguais e diferentes uma da outra! Um segundo axioma diz que uma curva é «a totalidade de um conjunto infinito de segmentos de recta, cada um infinitamente pequeno». Isto é abertamente um retomar de métodos que Aristóteles tinha banido 2000 anos antes.

L'Hôpital escreveu: «A análise normal trata apenas de quantidades finitas; esta vai tão longe quanto o próprio infinito. Ela compara as diferenças infinitesimais de quantidades finitas; descobre as relações entre estas diferenças e, deste modo, esclarece as relações entre quantidades finitas, que são como se fossem infinitas comparadas com as quantidades infinitamente pequenas. Pode até dizer-se que esta análise se prolonga para lá do infinito, pois não se restringe às diferenças infinitamente pequenas, mas descobre as relações entre as diferenças dessas diferenças.»

Newton e Leibniz não partilhavam do entusiasmo de L'Hôpital. Leibniz não afirmava que os infinitésimos existiam realmente, apenas que podia raciocinar-se através deles sem errar. Apesar de Leibniz não poder provar esta afirmação, o trabalho de Robinson mostra que em certo sentido ele, afinal, tinha razão. Newton tentou evitar o uso de infinitésimos. No seu *Principia Mathematica,* tal como no livro de Arquimedes *Sobre a Quadratura da Parábola,* resultados descobertos inicialmente com métodos infinitesimais são apresentados de um modo euclidiano, puramente finito.

Blaise Pascal
1623-1662

G. F. A. de L'Hôpital
1661-1704

Sir Isaac Newton
1642-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

A dinâmica tinha-se tornado tão importante como a geometria a gerar questões para a análise matemática. O problema principal eram as relações entre «fluentes» e «fluxões», que hoje seriam chamados a posição e a velocidade instantâneas de um corpo em movimento.

Consideremos uma pedra a cair. O seu movimento é descrito dando a sua posição em função do tempo. À medida que cai, a velocidade aumenta, de modo que a velocidade em cada instante é também uma função variável do tempo. Newton chamou à função posição «fluente» e à função velocidade «fluxão». Se qualquer uma das duas funções é conhecida, então, a outra pode ser determinada; esta relação é o cerne do cálculo infinitesimal descrito por Newton e Leibniz.

No caso da pedra a cair, o fluente é dado pela fórmula $s = 5t^2$, onde s é o número de metros percorridos e t é o tempo em segundos desde que a pedra foi largada. Ao cair, a pedra aumenta de velocidade continuamente. Como é possível calcular a velocidade da pedra num dado instante, por exemplo $t = 1$?

Podemos calcular a velocidade *média* para um tempo finito através da fórmula elementar: a velocidade é igual à distância percorrida dividida pelo tempo. Poderemos utilizar esta fórmula para sabermos a velocidade instantânea? Num intervalo infinitesimal de tempo, a distância percorrida seria também infinitesimal; a razão entre eles, a velocidade média durante o instante, deveria ser a velocidade instantânea finita que procuramos.

Representamos um incremento infinitesimal de tempo por dt e o correspondente incremento da distância por ds. (É claro que dt e ds têm de ser vistos como símbolos simples, e não como d vezes t ou d vezes s.) Queremos calcular a razão ds/dt, que deve ser finita. Para encontrarmos o incremento na: distância de $t = 1$ para $t = 1 + dt$ temos de calcular a posição da pedra quando $t = 1$, que é $5 \times 1^2 = 5$, e a sua posição quando $t = 1 + dt$, que é $5 \times (1 + dt)^2$. Utilizando álgebra elementar, descobrimos que ds, a variação da distância, que é a diferença entre aquelas duas distâncias, é $10dt + 5dt^2$. Assim, a razão ds/dt, que é a quantidade que procuramos, é igual a $10 + 5dt$.

Será que resolvemos o nosso problema? Uma vez que a resposta tem de ser uma quantidade finita, gostaríamos de nos livrar do termo *infinitesimal*, $5dt$, e o resultado para a velocidade instantânea seria 10 metros por segundo. Isto é precisamente o que o bispo George Berkeley não nos deixa fazer.

The Analyst, a crítica brilhante e devastadora de Berkeley ao método infinitesimal, apareceu em 1734. O livro era dirigido a «um matemático infiel», que se supõe ser o astrónomo amigo de Newton, Edmund Halley. Halley financiou a publicação dos *Principia* e ajudou a prepará-los para

impressão. Diz-se que também convenceu um amigo de Berkeley das «impossibilidades da doutrina cristã»; o bispo respondeu que as fluxões de Newton eram tão «obscuras, repugnantes e precárias» como qualquer ponto dessas doutrinas.

«Exigirei o privilégio de um livre-pensador», escreveu o bispo, «e tomarei a iniciativa de inquirir acerca dos objectivos, princípios e métodos de demonstração aceites pelos matemáticos de hoje com a mesma liberdade com que você decidiu tratar os princípios e mistérios da religião.» Berkeley declarou que o procedimento de Leibniz, ao «considerar» que $10 + 5dt$ era «o mesmo» que 10, era incompreensível. E escreveu: «Nem serve de justificação dizer que [o termo desprezado] é uma quantidade extrémamente pequena; uma vez que nos dizem que *in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi.»* Se algo é desprezado, não importa quão pequeno, não podemos dizer que encontrámos a velocidade exacta, mas apenas uma aproximação.

Newton, ao contrário de Leibniz, tentou nos últimos trabalhos suavizar a «dureza» da doutrina dos infinitésimos usando uma linguagem fisicamente sugestiva. «A velocidade última* refere-se àquela com que o corpo se move, não antes de chegar ao destino final, quando o movimento cessa, nem depois, mas no preciso instante em que chega [...]. E, do mesmo modo, por razão última de quantidades evanescentes entende-se a razão das quantidades, não antes de serem nulas, nem depois, mas quando se tornam nulas.» Porém, quando realizava cálculos, tinha de justificar porque desprezava termos «desprezáveis», que não interessavam, na sua resposta. O argumento de Newton era encontrar primeiro, tal como nós, $ds/dt = 10 + 5dt$ e depois igualar o incremento dt a zero, ficando com 10 como a resposta exacta.

Mas, escreveu Berkeley, «parece que este modo de pensar não é correcto nem conclusivo». Afinal, ou dt é igual a zero ou não é igual a zero. Se dt não é zero, então $10 + 5dt$ não é o mesmo que 10. Se dt é zero, então o incremento na distância também é zero, e a fracção ds/dt não é $10 + 5dt$, mas sim uma expressão sem significado, 0/0. «Pois, quando se diz façamos desaparecer os incrementos, isto é, deixemos que os incrementos sejam nada, ou deixemos que não haja incrementos, a suposição anterior de que os incrementos eram alguma coisa, ou de que existiam incrementos, é destruída e, no entanto, a consequência dessa suposição, isto é, uma expressão encontrada através dela, é mantida. Isto é um raciocínio falso.» Berkeley concluía caridosamente: «O que são estas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E o que

---

* *The ultimate velocity* no original. *(N. do T.)*

são estes incrementos evanescentes? Eles não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem são nada. Será que não poderemos chamar-lhes os fantasmas das quantidades desaparecidas?»

À lógica de Berkeley não podia responder-se; no entanto, os matemáticos continuaram a utilizar infinitésimos por mais um século e com grandes sucessos. Na verdade, físicos e engenheiros nunca desistiram de os empregar. Por outro lado, na matemática pura conseguiu-se um regresso ao rigor euclidiano no século XIX, que culminou sob a liderança de Weierstrass em 1872. É interessante notar que o século XVIII, a grande época dos infinitésimos, foi a altura em que não se reconhecia nenhuma barreira entre a física e a matemática. O principais físicos e os principais matemáticos eram as mesmas pessoas. Quando a matemática pura reapareceu como uma disciplina separada, os matemáticos certificaram-se de novo de que os fundamentos do seu trabalho não continham qualquer contradição óbvia. A análise moderna solidificou os seus fundamentos, fazendo o mesmo que os Gregos haviam feito, banindo os infinitésimos.

Para encontrarmos uma velocidade instantânea, de acordo com o método de Weierstrass, abandonamos qualquer tentativa de calcular a velocidade como uma razão. Em vez disso, definimos velocidade como um limite, que é aproximado por razões de incrementos finitos. Seja Δt um incremento de tempo finito e variável e Δs o correspondente incremento variável da distância. Então $\Delta s/\Delta t$ é a quantidade variável $10 + 5\Delta t$. Escolhendo Δt suficientemente pequeno, podemos tornar $\Delta s/\Delta t$ tão próximo quanto queiramos de 10, sendo, assim, por definição, a velocidade em $t = 1$ exactamente 10.

Esta abordagem consegue eliminar qualquer referência a números que não são finitos. Também evita qualquer tentativa de fazer Δt igual a zero na fracção $\Delta s/\Delta t$. Assim, evitamos ambas as armadilhas lógicas expostas pelo bispo Berkeley. No entanto, pagamos um preço. A quantidade intuitivamente clara e fisicamente mensurável, velocidade instantânea, fica sujeita à surpreendentemente subtil noção de «limite». Se explicarmos em pormenor o que isso significa, obteremos a seguinte descrição:

> A velocidade será υ se, para qualquer número positivo ϵ, $\Delta s/\Delta t - \upsilon$ for, em valor absoluto, menor do que ϵ para todos os valores de Δt que sejam, em valor absoluto, menores do que qualquer outro número positivo δ (que dependerá de ϵ e de t).

Definimos υ através de uma relação subtil entre duas novas quantidades, ϵ e δ, que, em certo sentido, são irrelevantes para υ. Pelo menos a ignorância de ϵ e de δ nunca impediu Bernoulli ou Euler de calcularem uma velocidade. Na realidade, já sabíamos o que era velocidade instan-

tânea antes de aprendermos esta definição; por razões de consistência lógica, aceitamos uma definição que é muito mais difícil de perceber do que o conceito a ser definido. É claro que para um matemático treinado a definição com *épsilon* e *delta* é intuitiva; isto mostra o que pode ser conseguido através de um treino correcto.

A reconstrução do cálculo baseado no conceito de limite e na sua definição com *épsilons-deltas* resultou numa redução do cálculo à aritmética de números reais. O impulso criado por estas clarificações dos fundamentos levou naturalmente ao assalto dos fundamentos lógicos do próprio sistema de números reais. Isto foi um regresso, após dois milénios e meio, ao problema dos números irracionais, que os Gregos, depois de Pitágoras, tinham abandonado por considerarem sem esperança. Uma das ferramentas nestes esforços foi um novo campo em desenvolvimento: a lógica matemática ou lógica simbólica.

Mais recentemente descobriu-se que a lógica matemática fornece um fundamento conceptual para a teoria das máquinas computacionais e dos programas de computador. Assim, este protótipo de pureza matemática tem de ser encarado, hoje em dia, como pertencendo à parte aplicável da matemática.

O elo entre a lógica e a computação é, em grande medida, a noção de linguagem formal, o tipo de linguagem que as máquinas compreendem. E foi a noção de linguagem formal que possibilitou a Robinson tornar precisa a afirmação de Leibniz, segundo a qual podia raciocinar-se sem erro como se os infinitésimos existissem.

Leibniz tinha encarado os infinitésimos como números infinitamente pequenos, positivos ou negativos, que ainda possuíam «as mesmas propriedades» dos números normais da matemática. Assim descrita, esta ideia parece contraditória. Se os infinitésimos têm as mesmas «propriedades» dos números normais, como podem ter a «propriedade» de serem positivos e, simultaneamente, mais pequenos do que qualquer número positivo normal? Foi utilizando uma linguagem formal que Robinson conseguiu resolver o paradoxo. Mostrou como podia construir-se um sistema contendo infinitésimos idêntico ao sistema de números «reais», em relação a todas as propriedades que podiam exprimir-se numa certa linguagem formal. É evidente que a «propriedade» de ser positivo e, ao mesmo tempo, mais pequeno do que qualquer número positivo normal *não* pode exprimir-se nessa linguagem, eliminando, deste modo, o paradoxo.

A situação é familiar para qualquer pessoa que tenha comunicado com um computador. Este apenas aceita como entradas *(inputs)* símbolos de uma certa lista que é do conhecimento do utilizador, tendo os símbolos

de ser usados de acordo com determinadas regras. A linguagem normal, usada na comunicação entre seres humanos, está sujeita a regras, que os linguistas ainda estão longe de perceber. Os computadores são «estúpidos», se tivermos de comunicar com eles, precisamente porque, ao contrário dos humanos, trabalham com uma linguagem formal com um dado vocabulário e um determinado conjunto de regras. Os seres humanos exprimem-se numa linguagem natural, com regras que nunca foram completamente explicitadas.

É claro que a matemática, tal como a filosofia ou a concepção de computadores, é uma actividade humana; tal como essas outras actividades, a matemática é desenvolvida por nós utilizando linguagens naturais. Mas, ao mesmo tempo, a matemática tem como característica especial a possibilidade de ser bem descrita usando uma linguagem formal, que reflecte de modo preciso o seu conteúdo. Pode dizer-se que a possibilidade de traduzir uma descoberta matemática numa linguagem formal é um teste à sua total compreensão.

Em análise não standard tomam-se como ponto de partida os números reais finitos e o resto do cálculo tal como os matemáticos o conhecem. Chamemos a isto o «universo standardizado», designado pela letra M. À linguagem formal em que falamos sobre M chamamos L. Qualquer afirmação em L é uma proposição acerca de M que, como é evidente, tem de ser verdadeira ou falsa. Isto é, qualquer afirmação em L é verdadeira, ou então a sua negação é verdadeira. Ao conjunto de todas as afirmações verdadeiras chamamos K e dizemos que M é um «modelo» para K. Queremos com isto dizer que M é uma estrutura matemática tal que todas as afirmações em K, quando interpretadas em relação a M, são verdadeiras. É claro que não «conhecemos» K de nenhum modo efectivo; se tal fosse verdadeiro, teríamos as respostas para todas as questões possíveis em análise. Mesmo assim, encaramos K como um objecto bem definido, sobre o qual podemos raciocinar e retirar conclusões.

O facto essencial, o ponto mais importante, é que, para além de M, que é o universo standardizado, existem também modelos não standardizados para K. Ou seja, existem estruturas M^*, essencialmente diferentes de M (num sentido que explicaremos adiante), que, no entanto, são modelos para K no sentido habitual do termo: existem objectos em M^* e relações entre esses objectos tais que, se os símbolos de L forem reinterpretados como aplicáveis a estes pseudo-objectos e pseudo-relações de modo apropriado, então, qualquer afirmação de K é ainda verdadeira, embora com um significado diferente.

Uma analogia grosseira poderá ajudar a intuição. Seja M o conjunto de estudantes do último ano de uma escola secundária. Suponhamos

que todos esses estudantes tiraram uma fotografia para o livro de curso, onde aparecem todos em quadrados com 5 cm de lado. Então M^* pode ser o conjunto de todos os quadrados de 5 cm em qualquer página do livro. Como é óbvio, não há dúvida de que qualquer afirmação verdadeira acerca de um estudante da escola corresponde a uma afirmação verdadeira sobre um certo quadrado do livro de curso. Mas existem muitos quadrados de 5 cm de lado no livro que não correspondem a nenhum estudante. M^* é muito maior do que M; além dos membros correspondentes a membros de M, M* contém muitos outros membros.

Assim, a afirmação «Harry Smith é mais magro do que George Klein», quando interpretada em M^*, é uma afirmação acerca de dois quadrados determinados do livro. E não será verdadeira se a relação «mais magro do que» for interpretada de modo standardizado. Assim «mais magro do que» tem de ser reinterpretada como uma pseudo-relação entre pseudo-estudantes (fotografias de estudantes). Apenas podemos definir a pseudo-relação «mais magro do que» (entre aspas) dizendo que o quadrado chamado «Harry Smith» é «mais magro do que» o quadrado chamado «George Klein» se Harry Smith for, na verdade, mais magro do que George Klein. Desta maneira, afirmações verdadeiras acerca de estudantes serão reinterpretadas como afirmações verdadeiras acerca de quadrados do livro.

É claro que neste exemplo todo o argumento é um pouco inventado. No entanto, se M é o universo standardizado do cálculo, então M^*, o universo não standardizado, é um local notável e interessante.

A existência de modelos não standardizados de interesse foi descoberta pela primeira vez pelo lógico norueguês Thoralf A. Skolem, que descobriu que os axiomas de contagem — os axiomas que descrevem os «números naturais» 1, 2, 3, etc. — admitem modelos não standardizados que contêm objectos «estranhos» que não existem na aritmética normal. A grande visão de Robinson consistiu em reparar como é que este desenvolvimento da lógica formal moderna podia servir de base para a ressurreição dos métodos infinitesimais no cálculo diferencial e integral. Para tal, apoiou-se num teorema demonstrado pelo lógico russo Anatoli Malcev e depois generalizado por Leon A. Henkin, da Universidade da Califórnia em Berkeley. É o teorema da «compactidade», relacionado com o famoso teorema da «completude» de Kurt Gödel; este último afirma que um conjunto de afirmações é logicamente consistente (não se consegue deduzir nenhuma contradição dessas afirmações) se, e apenas se, as afirmações têm um modelo, isto é, se, e apenas se, existir um «universo» no qual sejam todas verdadeiras.

O teorema da compactidade afirma o seguinte: suponhamos que temos uma colecção de afirmações na linguagem *L*. Suponhamos que no universo standardizado todos os subconjuntos finitos desta colecção são verdadeiros. Então, existe um universo não standardizado onde toda a colecção é verdadeira ao mesmo tempo.

O teorema da compactidade demonstra-se facilmente a partir do teorema da completude: se qualquer subconjunto finito de uma colecção de afirmações de *L* é verdadeiro no universo standardizado, então todo o subconjunto finito é logicamente consistente. Logo, a colecção inteira de afirmações é logicamente consistente (uma vez que qualquer dedução só pode utilizar um número finito de premissas). Pelo teorema da completude existe um universo (não standardizado) no qual a colecção inteira é verdadeira.

Uma consequência directa do teorema da compactidade é a «existência» de infinitésimos. Para vermos como este resultado espantoso aparece através do teorema da compactidade, consideremos as frases:

- *C* é um número maior do que zero e menor do que $^1/_2$;
- *C* é um número maior do que zero e menor do que $^1/_3$;
- *C* é um número maior do que zero e menor do que $^1/_4$;
- Etc.

Esta é uma colecção infinita de afirmações, cada uma das quais pode ser escrita na linguagem formal *L*. Em relação ao universo standardizado *R* dos números reais, qualquer subconjunto finito é verdadeiro, porque, se tivermos um número finito de frases da forma «*C* é um número maior do que zero e menor do que $1/n$», então, uma das frases conterá uma fracção $1/n$ menor do que todas as outras, sendo, por exemplo, $1/2n$ ainda maior do que zero e mais pequeno do que todas as fracções na nossa lista finita de frases. No entanto, se considerarmos todo o conjunto infinito destas frases, ele será falso em relação aos números reais standardizados, porque, por mais pequeno que seja o número real positivo *c*, podemos encontrar um *n* suficientemente grande tal que $1/n$ seja menor do que *c*.

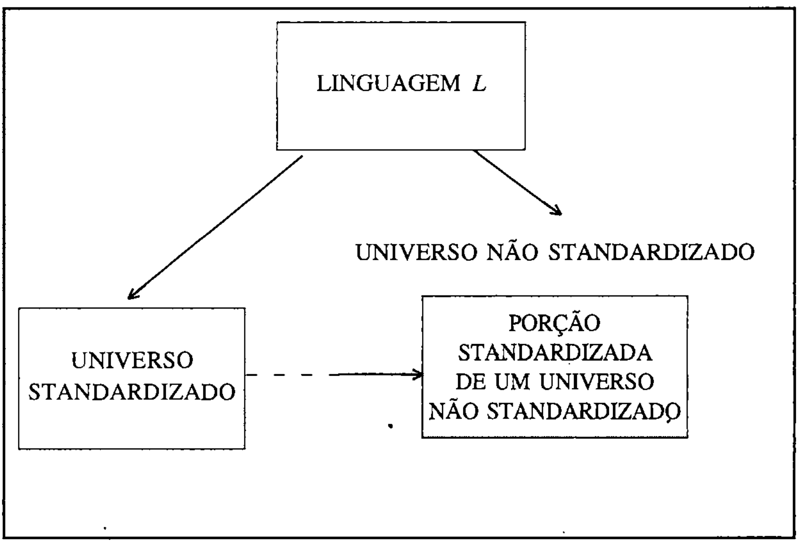
O teorema da compactidade de Malcev e Henkin afirma que existe um universo não standardizado que contém pseudo-reais R^*, que incluem um número positivo pseudo-real *c*, que é mais pequeno do que qualquer número da forma $1/n$. Isto é, *c* é um infinitésimo. Mais ainda, *c* tem todas as propriedades dos números reais standardizados num sentido perfeitamente preciso: qualquer afirmação verdadeira acerca dos reais standardizados que possa ser traduzida na linguagem *L* será também verdadeira para os reais não standardizados, incluindo o infinitésimo *c* — com a

apropriada interpretação. (O quadrado com 5 cm de lado chamado «Harry Smith» não é, na realidade, mais magro do que o quadrado chamado «George Klein», mas a afirmação «Harry Smith» é «mais magro do que» «George Klein» é verdadeira, com a nossa interpretação não standardizada de «mais magro do que».) Por outro lado, propriedades verdadeiras para todos os números reais standardizados poderão não ser aplicáveis aos pseudo-reais não standardizados se não puderem ser explicitadas na linguagem formal *L*.

A propriedade arquimediana de *R* (a não existência de infinitésimos) pode ser expressa, utilizando um conjunto infinito de frases em *L*, da seguinte maneira (o símbolo «>», como de costume, significa «é maior do que»). Para cada elemento positivo *c* de *R* todas, excepto possivelmente um conjunto finito, as seguintes frases são verdadeiras:

$$c + > 1$$
$$c + c > 1$$
$$c + c + c > 1$$

e assim sucessivamente.



O papel da linguagem formal na mediação entre os universos standardizado e não standardizado é aqui apresentado. A linguagem formal L *descreve o universo standardizado, que inclui os números reais da matemática clássica. As frases de* L *que são verdadeiras no universo standardizado também o são no universo não standardizado, que contém outros objectos matemáticos, como os infinitésimos. A análise não standardizada toma, pela primeira vez, o método preciso dos infinitésimos*

Porém, isto não é verdadeiro para os pseudo-reais R^*: se c é um infinitésimo (e logo um pseudo-real), todas estas frases são falsas. Por outras palavras, nenhuma soma finita de c pode exceder 1, não interessa quantas parcelas somemos. O simples facto de a propriedade arquimediana ser verdadeira no mundo standardizado, mas falsa no não standardizado, prova que essa propriedade não pode ser expressa por uma frase de L; a afirmação que fizemos envolve um número infinito de frases. É precisamente esta diferença que torna os pseudo-objectos úteis. Eles comportam-se «formalmente» como objectos standardizados, mas diferem em relação a importantes propriedades que não podem formalizar-se através de L.

Embora o universo não standardizado seja conceptualmente distinto do standardizado, é desejável pensar nele como uma extensão do universo standardizado. Uma vez que R^* é um modelo para L, qualquer afirmação verdadeira acerca de R tem uma interpretação em R^*. Em particular, os nomes de números em R têm uma interpretação como nomes de objectos em R^*. Podemos simplesmente identificar o objecto em R^* chamado «2» com o número habitual 2 em R. Deste modo, R^* contém os números reais standardizados juntamente com a vasta colecção de quantidades infinitesimais e infinitas na qual R está imerso.

Um objecto em R^* (um número pseudo-real) diz-se infinito se é pseudomaior do que qualquer número real standardizado; caso contrário, é finito. Um número pseudo-real positivo diz-se um infinitésimo se é pseudomenor do que qualquer número real standardizado positivo. Se a pseudodiferença entre dois pseudo-reais é finita, dizemos que pertencem à mesma «galáxia»; o eixo pseudo-real contém uma infinidade não contável de galáxias. Se a pseudodiferença entre dois pseudo-reais é infinitesimal, dizemos que pertencem à mesma «mónada» (um termo que Robinson recuperou dos escritos filosóficos de Leibniz). Se um pseudo-real r^* está infinitamente próximo de um número real standardizado r, dizemos que r é a parte standardizada de r^*. Todos os números reais standardizados encontram-se na mesma galáxia, à qual chamamos galáxia principal. Na galáxia principal qualquer mónada contém um, e apenas um, número real standardizado. Esta mónada é a «vizinhança infinitesimal» de r: o conjunto de reais não standardizados infinitamente próximos de r. A noção de mónada revela-se aplicável não só aos números reais, mas também a espaços gerais, métricos e topológicos. A análise não standardizada é, assim, relevante não apenas para o cálculo elementar, mas para toda a análise abstracta moderna.

Quando dizemos que os infinitésimos, ou mónadas, existem, deve ficar claro que tal não tem o mesmo significado que teria sido compreendido por Euclides ou Berkeley. Até há cem anos todos os filósofos e matemáticos admitiam tacitamente que os assuntos tratados pela matemática eram objectivamente reais, do mesmo modo que os assuntos estudados pela física o são. Se os infinitésimos existiam ou não, era uma questão de facto, não muito diferente da questão de saber se existem átomos materiais ou não. Hoje em dia muitos matemáticos, talvez a maioria, não partilham dessa convicção da existência real dos objectos que estudam. A teoria de modelos nada afirma, num sentido ou no outro, em relação a esse tipo de questões ontológicas. O que os matemáticos pretendem dos infinitésimos não é a sua existência real, mas o direito de os usarem em demonstrações. Para tal, apenas necessitam da garantia de que uma demonstração com infinitésimos não é pior do que uma sem eles.

A utilização da análise não standardizada na investigação decorre mais ou menos como se segue. Pretendemos demonstrar teoremas que envolvem apenas objectos standardizados. Se colocarmos os objectos standardizados no contexto mais alargado não standardizado, talvez seja possível encontrar uma demonstração mais curta e que «permita uma maior compreensão» usando objectos não standardizados. O teorema fica então provado em relação à interpretação não standardizada das respectivas palavras e símbolos. Esses objectos não standardizados, que correspondem a objectos standardizados, têm a propriedade de as afirmações acerca deles só serem verdadeiras (na interpretação não standardizada) se o forem em relação ao objecto standardizado (na interpretação standardizada). Assim, demonstramos teoremas sobre objectos standardizados raciocinando com objectos não standardizados.

Recordemos, por exemplo, a «prova» de Nicolau de Cusa de que a área de um círculo com raio 1 é metade da sua circunferência. De acordo com a teoria de Robinson, percebemos em que sentido é aquele argumento correcto. Uma vez que existem números infinitesimais e números infinitos (no universo não standardizado), podemos provar que a área de um círculo é a parte standardizada da soma (no universo não standardizado) de um número infinito de infinitésimos.

De acordo com Robinson, o problema da pedra a cair seria tratado da seguinte maneira: definimos velocidade instantânea, não como a razão entre incrementos infinitesimais (como fez L'Hôpital), mas como a parte standardizada dessa razão; neste caso, ds, dt, e a sua razão ds/dt são números reais não standardizados. Tal como anteriormente, $ds/dt =$

$= 10 + 5dt$, mas agora concluímos imediatamente, rigorosamente e sem qualquer argumento limitativo, que υ, a parte standardizada de ds/dt, é igual a 10. Uma pequena modificação no método de infinitésimos de Leibniz, distinguindo cuidadosamente entre o número não standardizado ds/dt e a sua parte standard υ, evita a contradição, que L'Hôpital simplesmente ignorou.

É claro que é necessária uma demonstração de que a definição de Robinson dá o mesmo resultado que a definição de Weierstrass. A prova não é difícil, mas não a faremos aqui.

O método infinitesimal é, pela primeira vez, tornado preciso. No passado, os matemáticos tinham de fazer uma escolha. Se usassem infinitésimos, tinham de se basear na experiência e na intuição para raciocinarem correctamente. Jean Le Rond d'Alembert, supostamente, aconselhou a um amigo matemático hesitante: «Continua, que a fé em breve regressará.» Para uma certeza rigorosa, tínhamos de recorrer ao complexo método arquimediano da exaustão ou à sua versão moderna, o método do *épsilon/delta* de Weierstrass. Agora o método dos infinitésimos, ou mais geralmente o método das mónadas, foi elevado do nível do heurístico ao do rigoroso. A abordagem da lógica formal tem sucesso ao escapar-se totalmente da questão que exaltava Berkeley e todos os outros cépticos de outrora, isto é, se as quantidades infinitesimais têm ou não algum sentido objectivo.

Do ponto de vista de um matemático, no seu trabalho o importante é que recupera certos métodos de demonstração, certas linhas de pensamento, que têm sido frutuosas desde antes de Arquimedes. A noção de uma vizinhança infinitesimal já não é uma figura de estilo contraditória, mas um conceito definido de modo preciso, tão legítimo como qualquer outro em análise.

As aplicações que discutimos são elementares, mesmo triviais. Existiram e existem aplicações não triviais. Apareceram trabalhos em dinâmica não standardizada e probabilidades não standardizadas. Robinson e o seu aluno Ailen Bernstein recorreram à análise não standard para resolver um problema, até aí sem solução, sobre operadores lineares compactos. Mas deve ser dito que muitos analistas permanecem cépticos em relação à verdadeira importância do método de Robinson. É certo que, em princípio, o que pode ser feito com infinitésimos também pode ser feito sem eles. Tal como aconteceu com outras inovações radicais, talvez o uso total das novas ideias só seja feito por uma nova geração de matemáticos que não estejam demasiado enraizados nos métodos standardizados e que possam explorar a liberdade e o poder da análise não standard.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

A. Robinson [1966]; M. Davis [1977]; K. D. Stroyan; W. A. J. Luxemburg.

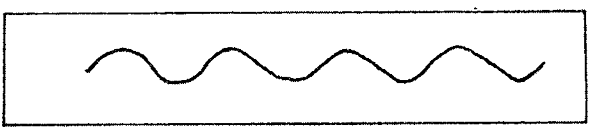
Análise de Fourier

Hermann von Helmholtz
1821-1894

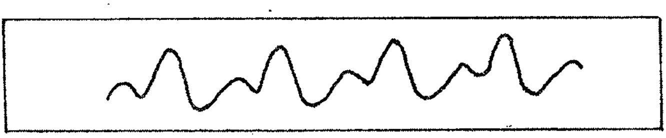
É possível representar a ópera *Aída* de Verdi dispensando todos os instrumentos de sopro, as cordas e a percussão, e mesmo os barítonos e os sopranos; apenas é necessária uma colecção completa de diapasões e um método preciso de controlar o respectivo volume.

Esta é uma aplicação à acústica do «teorema de Fourier», uma das proposições mais úteis em muitos ramos da física e da engenharia. Uma «prova» física do teorema foi apresentada por Hermann von Helmholtz quando demonstrou que era possível obter sons musicais complexos combinando, de determinadas formas, diapasões que eram excitados electricamente. (Hoje em dia os aparelhos deste tipo denominam-se sintetizadores de música electrónica.)

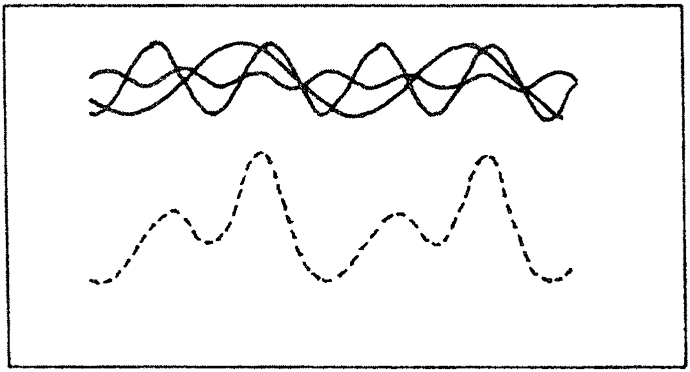
Em termos matemáticos, cada diapasão emite uma vibração, cujo gráfico, em função do tempo, corresponde a um seno:



A distância entre dois picos consecutivos, o comprimento de onda ou o período, deveria ser $^1/_{264}$ de um segundo se a nota fosse um dó central. A altura de cada pico é a amplitude, podendo-se, grosseiramente, dizer que representa o volume. Qualquer som musical corresponde, fisicamente, a uma variação periódica da pressão do ar, pelo que o respectivo gráfico pode ser uma curva semelhante a esta:



O teorema de Fourier afirma, em termos gráficos, que uma curva como a apresentada atrás pode ser obtida somando uma série de gráficos semelhantes ao primeiro:



Uma combinação de três tons puros cujas razões entre as frequências são números inteiros pequenos

Em termos analíticos, isto significa que, se y é uma função periódica que se repete, por exemplo, cem vezes por segundo, então y tem uma expressão do género:

$$y = 7 \text{ sen } 200\pi t + 0{,}3 \text{ sen } 400\pi t + 0{,}4 \text{ sen } 600\pi t + \ldots$$

Em cada termo, o tempo t é multiplicado por 2π vezes a frequência. O primeiro tenno, com frequência 100, denomina-se fundamental, ou primeiro harmónico; os harmónicos de ordem superior têm frequências que são múltiplos exactos de 100. Os coeficientes 7, 0,3, 0,4, etc., têm de ser ajustados de modo a corresponderem fielmente ao som em questão, a que chamámos y. Os três pontos no fim indicam que a expansão continua indefinidamente; quanto maior é o número de termos incluídos, mais a soma se aproxima de y.

E, se o y não for periódico — se não se repetir, por muito tempo que esperemos? Neste caso, podemos encarar y como o limite de uma sequência de funções com períodos cada vez maiores (o que implica frequências cada vez menores). O teorema de Fourier exige então uma soma que inclua todas as frequências, e não apenas múltiplos de uma determinada frequência fundamental. À expansão chama-se agora integral de Fourier, em vez de série de Fourier.

Depois de termos traduzido o teorema da linguagem da física para a linguagem da matemática, temos o direito de pedir uma proposição e uma

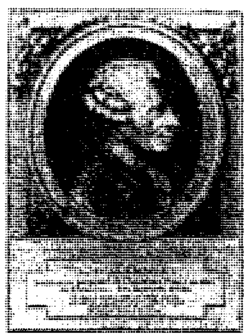
demonstração de acordo com os padrões matemáticos. Que tipo de função matemática pode ser y? Que significa precisamente a soma de uma série infinita? Estas questões, levantadas pelas exigências práticas da análise de Fourier, estão na base dos esforços de todos os grandes analistas desde Euler e Bernoulli; ainda hoje são produzidas novas respostas.

Uma resposta nova, muito prática, é uma técnica eficiente e engenhosa de realizar numericamente a análise de Fourier num computador digital. Um artigo famoso de J. W. Cooley e J. W. Tukey, em 1965, explorava a notação binária inerente à computação moderna para obter reduções radicais no tempo de cálculo. Tirando o máximo partido das propriedades de simetria dos senos, reduziram o número de operações necessárias para calcular a expressão de Fourier de uma função dada por N pontos de N^2 operações para ($2N$) vezes o (logaritmo de N na base 2). Esta redução foi suficiente para em muitas aplicações se tomar possível a utilização computacional efectiva, pela primeira vez, de expansões de Fourier. Verificou-se, por exemplo, que para $N = 8192$ o cálculo demorou cerca de 5 segundos num *IBM* 7094, enquanto as rotinas convencionais levavam meia hora.

As séries de Fourier tiveram origem num problema muito semelhante à interpretação musical que demos da análise de Fourier. Referimo-nos ao problema de uma corda vibrante.

Ondas em cordas

A «equação de onda» que regula a vibração de uma corda foi deduzida em 1747 por d'Alembert, que descobriu também uma solução dessa equação, correspondente à soma de duas ondas, de forma idêntica mas «arbitrária», uma movendo-se para a direita e a outra para a esquerda. Se a corda se encontra inicialmente em repouso (velocidade zero), o seu movimento futuro é completamente determinado pelo desvio inicial em relação ao equilíbrio. Assim, existe uma função arbitrária tanto no problema (a que dá a posição inicial da corda antes de ser largada) como na solução de d'Alembert (a que dita a forma da onda). Deste modo, d'Alembert considerou que tinha encontrado a solução geral do problema.



Jean Le Rond d'Alembert
1717-1783

No entanto, é essencial compreender que d'Alembert e os seus contemporâneos chamaram «função» àquilo a que hoje em dia nos referimos como «fórmula» ou «expressão analítica». Euler mostrou que a posição inicial da corda não tem

de ser obrigatoriamente representada por uma única função. Cada parte da corda podia muito bem ser descrita por uma fórmula diferente (segmentos de recta, arcos de circunferências, etc.) desde que estas se unissem de forma suave.

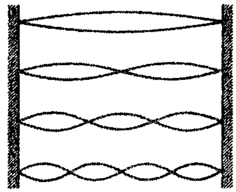
Mais ainda, a solução da onda a propagar-se podia ser extendida a esta nova situação. Se a forma dessa onda correspondesse à forma do desvio inicial do equilíbrio, então Euler afirmava que a solução ainda era válida, apesar de não ser dada por uma única função, mas por várias, cada uma aplicável numa região diferente. O importante é que para Euler e d'Alembert cada função tinha um gráfico, mas nem todos os gráficos representavam uma única função. Euler argumentava que qualquer gráfico (mesmo que não fosse dado por uma função) deveria ser admitido como uma posição inicial possível para a corda. D'Alembert não aceitava o raciocínio físico de Euler.

Em 1755, Daniel Bernoulli juntou-se à discussão. Encontrou outra forma para a solução da corda vibrante, usando «ondas estacionárias». Uma onda estacionária é um movimento da corda com «nodos» fixos, que são estacionários; entre os nodos, cada segmento da corda move-se para cima e para baixo em sincronia. O «modo principal» é aquele que não tem nodos, onde toda a corda se move em conjunto. «Segundo harmónico» é o nome dado ao movimento com apenas um nodo no meio da corda. O «terceiro harmónico» tem dois nodos igualmente espaçados, e assim por diante. Em cada um destes nodos, qualquer que seja o instante, a corda tem a forma da função seno, e em qualquer ponto fixo da corda o movimento é descrito por um co-seno em função do tempo. Cada «harmónico» corresponde, assim, a um tom musical puro. O método de Bernoulli consistia em resolver o problema geral da corda vibrante somando um número infinito de ondas estacionárias. Isto obrigava a que o desvio inicial fosse uma soma de um número infinito de funções seno. Fisicamente, isso significava que qualquer som produzido pela corda poderia ser obtido como uma soma de tons puros.

Tal como d'Alembert tinha rejeitado o raciocínio de Euler, também agora Euler rejeitava o de Bernoulli. Antes de mais, como Bernoulli reconhecia, o próprio Euler tinha já encontrado a solução de onda estacionária num caso especial. A objecção de Euler era a afirmação de que a solução de onda estacionária era geral — aplicável a todos os movimentos da corda. Escreveu ele:

> Consideremos que temos uma corda que, antes de iniciar o movimento, tem uma forma que não pode ser expressa pela equação:
>
> $$y = \alpha \text{ sen } (\pi x/a) + \beta \text{ sen } (2\pi x/a) + \ldots$$

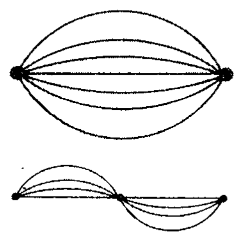
Ninguém duvida de que a corda, depois de excitada, terá um certo movimento. É bastante claro que a forma da corda, no instante depois de libertada, também será diferente desta equação, e, mesmo que, passado algum tempo, a corda tenha uma forma descrita pela equação, não pode negar-se que antes desse tempo o movimento da corda foi diferente do contido no argumento de Bernoulli.



Os primeiros quatro modos de vibração de uma corda fixa nas duas extremidades

O método de Bernoulli envolvia a representação da posição inicial como uma soma infinita de funções seno. Tal soma é uma expressão analítica concreta que Euler teria encarado como uma *única função* e, assim, não podia representar uma posição inicial composta por várias funções distintas unidas. Mais ainda, a Euler parecia evidente que uma série de senos nem mesmo podia representar uma única função arbitrária, pois os seus ingredientes são todos periódicos e simétricos em relação à origem. Como poderia então ser igual a uma função que não tivesse estas propriedades?

Bernoulli não desistiu; uma vez que a sua expansão continha um número infinito de coeficientes indeterminados, afirmava que estes podiam ser ajustados de modo a corresponderem a uma função arbitrária em infinitos pontos. Hoje em dia este é um argumento fraco, pois a igualdade num número infinito de pontos não garante, de modo algum, a igualdade em todos os pontos. No entanto, como podia ver-se, Bernoulli estava mais perto da verdade do que Euler.



Ondas estacionárias numa corda; o modo fundamental e o segundo harmónico

Euler regressou ao assunto das séries trigonométricas em 1777. Considerou, então, o caso de uma função que se sabia ter uma expansão em co-senos:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \ldots$$

Um gráfico composto por dois arcos circulares e uma linha recta. Para Euler, este gráfico não representa uma só função, mas três. Para Fourier e Dirichlet, este gráfico representa uma função que tem uma série em expansão de Fourier

e o seu objectivo era encontrar uma fórmula conveniente para os coeficientes a_0, a_1, etc. Parece estranho que este problema, que, sabemo-lo hoje, pode ser resolvido com meia dúzia de cálculos, não tenha sido resolvido nem por Bernoulli nem por Euler. Mais espantoso ainda é o argumento complicado utilizado por Euler, que

envolvia o uso repetido de identidades trigonométricas e duas passagens ao limite. Depois de encontrar a fórmula simples para os hoje denominados «coeficientes de Fourier», apercebeu-se do truque que lhe teria dado a resposta imediatamente.

Digamos que queremos o quinto coeficiente a_5. Escreve-se a expansão de f com coeficientes desconhecidos:

$$f = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_5 \cos 5x + \dots$$

Multiplicam-se ambos os lados por cos $5x$ e integram-se (isto é, faz-se a média entre $x = 0$ e $x = \pi$).

Assim, ficamos com o integral de uma série infinita do lado direito. Os matemáticos do tempo de Euler tinham como certo que era sempre possível calcular tal expressão integrando termo a termo e somando. Mas, se integrarmos cada termo, descobrimos uma coisa maravilhosa. Todos os integrais, excepto o quinto, são iguais a zero! Uma vez que podemos calcular facilmente $\int_0^\pi a_5(\cos 5x)^2\,dx = \frac{\pi a_5}{2}$, temos $\int_0^\pi f(x)\cos 5x\,dx = \frac{\pi a_5}{2}$, e logo $a_5 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 5x\,dx$. Argumentos semelhantes aplicam-se, é claro, a todos os outros coeficientes.

Este simples e belo argumento baseia-se completamente no facto de $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx = 0$ quando m é diferente de n. (Uma fórmula análoga é válida para os senos.) Esta propriedade dos co-senos é descrita modernamente na frase «os co-senos são ortogonais no intervalo 0 a π». A justificação para esta linguagem geométrica (ortogonal significa perpendicular) aparecerá mais tarde na nossa história.

Para podermos apreciar o trabalho de Fourier, é essencial percebermos que Euler acreditou até ao fim que apenas uma classe muito especial de funções, dadas por apenas uma expressão analítica em todo o domínio, poderia ser representada por uma série de senos ou co-senos. Acreditava que a sua fórmula para os coeficientes só era válida nestes casos especiais.

Fourier utilizou senos e co-senos no estudo de fluxo de calor de modo muito semelhante ao método de Bernoulli no estudo de vibrações. A onda estacionária de Bernoulli é uma função de variáveis (tempo t e espaço x) que tem a propriedade muito especial de se factorizar numa função do espaço vezes uma função do tempo. Para que tal produto satisfaça a equação da corda vibrante, os dois factores têm de ser senos ou co-senos. As condições de fronteira (extremidades fixas e velocidade inicial zero) e o comprimento da corda determinam que esses factores serão da forma sen nx e cos mt.

Quando Fourier estabeleceu a sua equação para a condução do calor, descobriu que também ela tinha soluções especiais que podiam factorizar-se numa função do espaço vezes uma função do tempo. Neste caso, a função do tempo é exponencial, em vez de trigonométrica, mas, se o sólido condutor de calor, que estamos a estudar, for rectangular, obtemos de novo funções trigonométricas do espaço.

Suponhamos, por exemplo, que temos um bloco de metal cuja superfície é mantida a uma temperatura fixa. Então considerações de ordem física mostram que a distribuição interior de temperatura no instante $t = 0$ é suficiente para determinar essa distribuição em todos os instantes posteriores. Mas esta distribuição inicial de temperatura pode ser arbitrária. No entanto, *Fourier afirmou que ela é igual à soma de uma série de senos e co-senos*. Neste argumento, Fourier repetia o ponto de vista de Bernoulli. Todavia, enquanto Bernoulli tinha em mente apenas as funções formadas analiticamente por uma única expressão, Fourier incluiu explicitamente funções (distribuições de temperatura) dadas por ramos com várias expressões diferentes. Por outras palavras, estava a afirmar que não existia a distinção entre «função» e gráfico que tinha sido reconhecida implicitamente por todos os analistas anteriores; tal como toda a «função» tem um gráfico, também todo o gráfico representa uma função — a sua série de Fourier! Não admira que Lagrange, o analista por excelência do século XVIII, achasse a pretensão de Fourier difícil de engolir.

Como calculava Fourier

É claro que um passo essencial no trabalho de Fourier era encontrar a fórmula para os coeficientes da expansão. Fourier não sabia que Euler já o tinha feito, pelo que fez tudo de novo. Fourier, tal como Bernoulli e Euler antes dele, não reparou no maravilhoso método directo da ortogonalidade, que acabámos de explicar. Pelo contrário, percorreu uma série incrível de cálculos que poderiam servir de exemplo clássico de intuição física que leva à resposta certa apesar do raciocínio flagrantemente errado.

Joseph Fourier
1768-1830

Começando por expandir cada função seno numa série de potências (série de Taylor), reordenou depois os termos, de modo a que a função «arbitrária» f fosse agora representada por uma série de potências. Logo aqui pode questionar-se este argumento, pois as funções que Fourier tinha em mente, em geral, não têm com certeza essa

expansão. De qualquer modo, Fourier prosseguiu, encontrando os coeficientes desta expansão (inexistente) em série de potências. Para tal, recorrendo a duas suposições flagrantemente inconsistentes, chegou a uma resposta que envolvia a divisão por um produto infinito divergente (isto é, um número arbitrariamente grande). A única interpretação sensata que pode ser dada a esta fórmula para a expansão em série de potências é a de que todos os coeficientes se anulam — isto é, a função «arbitrária» é identicamente zero. «Fourier não tinha a mínima intenção de retirar essa conclusão, pelo que prosseguiu sem esmorecer na análise da sua fórmula.» Este é o comentário de Rudolf Langer num artigo ao qual devemos a nossa sinopse da dedução de Fourier. Partindo desta fórmula pouco prometedora, Fourier foi capaz, utilizando manipulações ainda mais formais, de chegar, em última análise, à mesma fórmula simples que Euler tinha obtido correctamente, e muito mais facilmente, trinta anos antes.

É um tributo à visão de Legendre, Laplace e Lagrange o facto de terem atribuído a Fourier o Grande Prémio da Academia, apesar dos defeitos evidentes do seu raciocínio. O golpe de mestre de Fourier foi dado *depois* de ter alcançado a fórmula de Euler. Nesse ponto reparou, como já Euler o havia feito, que a fórmula simples poderia ter sido obtida numa linha, usando a ortogonalidade dos senos. Todavia, notou ainda, ao contrário de todos os seus antecessores, que a fórmula final dos coeficientes e a dedução pela ortogonalidade dos senos são válidas para qualquer gráfico que delimite uma área definida — para Fourier, tal significava qualquer gráfico, sem excepção. Tinha já calculado as séries de Fourier para alguns exemplos especiais; descobriu numericamente que, em todos os casos, a soma dos primeiros termos era muito próxima do gráfico inicial que tinha originado a série. Partindo desta base, afirmou que todas as distribuições de temperatura — ou, se quisermos, todos os gráficos, independentemente do número de ramos — são representáveis por uma série de senos e co-senos. Deve, porém, ficar claro que, embora um conjunto de exemplos especiais transmita alguma convicção, não é de modo algum uma demonstração no sentido dado a essa palavra pelos matemáticos. Segundo Langer, «foi, sem dúvida, o seu desrespeito pelo rigor que, em parte, lhe permitiu efectuar saltos conceptuais que eram inerentemente impossíveis para génios mais críticos».

Fourier tinha razão, apesar de não ter enunciado nem ter demonstrado um teorema correcto acerca das séries de Fourier. As ferramentas que usou tão descuidadamente dão ao seu nome uma imortalidade merecida. Para se compreender o que ele fez, foi necessário, durante um século, o esforço de homens de «génio mais crítico», e o fim da história não está ainda à vista.

O que é uma função?

Antes de tudo, o que fazer com a aparentemente pertinente objecção de Euler de cinquenta anos antes? Como era possível que uma soma de funções periódicas (senos e co-senos) pudesse ser igual a uma função arbitrária que *não* fosse periódica? Muito simples. A função arbitrária é dada apenas num certo domínio, por exemplo entre 0 e π. Fisicamente, representa a posição inicial de uma corda de comprimento π, ou a temperatura inicial de uma barra de comprimento π. É apenas neste domínio que as variáveis físicas têm sentido, sendo precisamente neste domínio que a série de Fourier é igual à função dada. É irrelevante se a função dada tem ou não um prolongamento fora desse domínio; se o tiver, *não* será, em geral, igual à série de Fourier aí. Por outras palavras, pode perfeitamente acontecer que tenhamos duas funções que são idênticas num determinado domínio, digamos, entre 0 e π, e diferentes fora desse domínio. Esta é uma possibilidade que parece nunca ter sido considerada por d'Alembert, Euler ou Lagrange. Esta ideia não só tornou possível o uso sistemático de séries de Fourier em matemática aplicada, como também levou ao primeiro estudo cuidadoso e crítico da noção de função, que, em todas as suas ramificações, é uma ideia tão frutuosa como todas as outras em ciência.


Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859

Foi Dirichlet (1805-1859) quem pegou nos exemplos e conjecturas de Fourier e os transformou em matemática respeitável. O primeiro pré-requisito era uma definição clara e explícita de função. Dirichlet deu a definição que até hoje é a mais utilizada. Uma função $y(x)$ é determinada se tivermos qualquer regra que dê um valor definido y para qualquer x num determinado conjunto de pontos. «Não é necessário que y tenha a mesma regra em relação a x em todo o intervalo», escreveu Dirichlet; «na verdade, nem é necessário que possa representar-se essa relação em termos de operações matemáticas [...] Não interessa se pensamos nela [correspondência] de modo que partes diferentes sejam dadas por leis diferentes ou se ela [a correspondência] não respeita nenhuma lei específica [...] Se uma função é especificada em apenas uma parte de um intervalo, o modo como se define o seu prolongamento ao resto do intervalo é inteiramente arbitrário.»

Era isto o que Fourier designava por uma «função arbitrária»? Certamente que não no sentido em que Dirichlet interpretava a expressão

qualquer regra. Consideremos o seguinte exemplo famoso que Dirichlet apresentou em 1828. $\phi(x)$ será igual a 1, se x for racional, e $\phi(x) = 0$, se x for irracional. Uma vez que qualquer intervalo, por mais pequeno que seja, contém sempre pontos racionais e irracionais, seria impossível desenhar o gráfico desta função. Deste modo, com a definição de função dada por Dirichlet, a análise ultrapassa, e muito, a geometria. Enquanto o conceito restrito de função, utilizado no século XVIII, não era adequado para descrever algumas curvas facilmente desenháveis (como as apresentadas atrás), o conceito de função arbitrária do século XIX inclui criaturas impossíveis de desenhar ou visualizar.

É evidente que não pode esperar-se que seja possível representar esta função 0-1 de Dirichlet através de uma série de Fourier. Na realidade, uma vez que a área por baixo de tal «curva» é indefinida, e os coeficientes de Euler são obtidos por integração (isto é, calculando uma área), Fourier não teria conseguido calcular nem um termo da série de Fourier deste exemplo. É claro que, como físico prático, Fourier não tinha em mente invenções perversas da matemática pura como esta.

Pela positiva, Dirichlet demonstrou correcta e rigorosamente que, se uma função f tem um gráfico com apenas um número finito de pontos de viragem e se é suave, excepto num número finito de cantos e saltos*, então, a soma da série de Fourier de f num determinado ponto tem o mesmo valor que f nesse ponto (pressupondo que nos pontos onde f tem um salto, lhe atribuímos um valor igual à média dos valores à direita e à esquerda).

Este é o resultado que costumava ser ensinado em cursos antiquados de matemática para engenheiros, com base no pressuposto de que qualquer função que alguma vez aparecesse em física satisfaria o «critério de Dirichlet». É plausível que qualquer curva que possa ser desenhada com giz ou caneta satisfaça o critério de Dirichlet. Porém, tais curvas estão longe de representar todas as situações de interesse em física ou engenharia.

Sublinhemos a importância do resultado de Dirichlet. A fórmula $y(x) = b_1 \text{ sen } x + b_2 \text{ sen } 2x + b_3 \text{ sen } 3x + \ldots$ é verdadeira no seguinte sentido: se escolhermos qualquer valor determinado x_0 entre 0 e π, então, $y(x_0)$ é um número e o membro direito é uma soma de números. Afirma-se que, se forem tomados termos suficientes da série, o resultado dessa soma será tão próximo quanto se queira do valor de y no ponto dado x_0. Isto designa-se por convergência *pontual,* aparentemente a mais simples, mas, na realidade, a mais complicada de muitas possíveis noções de convergência. De um ponto de vista puramente matemático, o resultado de

* Ou seja, com apenas um número finito de descontinuidades de f e da derivada.

Dirichlet não foi um fim, mas um princípio. O que um matemático quer é uma resposta boa e bem definida — uma condição necessária e suficiente, como se diz neste campo. O critério de Dirichlet é uma condição suficiente, mas de modo algum necessária.

Bernhard Riemann (1816-1866) compreendeu que para progredir era necessário um conceito mais geral de integração, suficientemente poderoso para tratar funções com um número infinito de descontinuidades. Isto porque as fórmulas de Euler expressam os coeficientes de Fourier de f como integrais de f vezes um seno. Se a função f é generalizada para além da noção intuitiva de curva suave, então, o integral de f tem de ser generalizado para além da noção intuitiva da área por baixo de uma curva. Riemann conseguiu essa generalização. Utilizando o seu «integral de Riemann», foi capaz de encontrar exemplos de funções que violavam as condições de Dirichlet, mas para as quais ainda era válido o teorema de Fourier.

A procura de condições necessárias e suficientes para a validade do teorema de Fourier tem sido longa e árdua. Para aplicações físicas queremos naturalmente admitir funções com saltos. Ou seja, permitimos que f seja descontínua. Queremos, obviamente, que a função seja integrável, uma vez que os coeficientes são obtidos por integração. Por outro lado, se os valores de f forem alterados num único ponto, ou em vários pontos, o valor do integral não é afectado (pois este é a média de f sobre todos os pontos, em quantidade não contável, entre 0 e π). Logo, os coeficientes de Fourier de f não se alteram. Esta observação mostra que a convergência pontual não é o modo natural de estudar o problema, pois podem existir pontos onde duas funções f e g sejam diferentes e, no entanto, f e g ainda tenham a mesma expansão de Fourier. Na realidade, foi a tentativa de compreender quais os conjuntos de pontos irrelevantes para a série de Fourier que levou Georg Cantor a dar os primeiros passos na criação da sua teoria abstracta de conjuntos.

Henri Lebesgue
1875-1941

Um requisito mais modesto e razoável do que a convergência em *todos* os pontos é o de que a série de Fourier de f seja igual a f, excepto eventualmente num conjunto de pontos tão pequeno que passe despercebido no processo de integração. Tais conjuntos, definidos com precisão por H. Lebesgue (1875-1941), designam-se por conjuntos de medida nula e são utilizados para definir uma noção de integral ainda mais poderosa do que a de Riemann. Podemos pensar nestes

conjuntos da seguinte maneira: se escolhermos aleatoriamente um ponto entre 0 e 1, a probabilidade de esse ponto pertencer a um dado intervalo será igual ao comprimento desse intervalo. Se a probabilidade de pertencer a um dado conjunto de pontos é zero, então, diz-se que esse conjunto tem medida nula.

O comprimento de um ponto é, por defmição, zero. Se adicionarmos os comprimentos de vários pontos, essa soma será também zero. Deste modo, um conjunto finito de pontos tem medida nula. Existem também conjuntos de medida nula com pontos infinitos. É até possível que um conjunto tenha medida nula e, ao mesmo tempo, seja «denso em todo o lado» — isto é, tenha um representante em qualquer intervalo, por mais pequeno que este seja. De facto, o conjunto de todos os números racionais é exactamente desse tipo, um conjunto denso de medida nula. Portanto, do ponto de vista de Lebesgue, a função 0-1 de Dirichlet *tem* uma expansão de Fourier — e todos os coeficientes são zero, uma vez que a função é zero «em quase todos os pontos», como afirmou Lebesgue. Este é o tipo de matemática que faz tremer as pessoas mais «práticas». Para que serve uma expansão de Fourier se dá a resposta errada não só em alguns pontos isolados, mas também num conjunto denso em todo o lado?

Contudo, mesmo que estejamos dispostos a aceitar a convergência apenas «em quase todos os pontos» (isto é, excepto num conjunto de medida nula), podemos não o conseguir. Em 1926, Kolmogorov construiu uma função integrável cuja série de Fourier divergia em *toda a parte.* Assim, a integrabilidade, só por si, não é a base nem mesmo de uma teoria «em quase todos os pontos».

Funções generalizadas

Uma abordagem diferente, e muito em voga na análise moderna, consiste em ter em conta muito mais seriamente a propriedade de «ortgonalidade» da função seno. Se f é uma função de período π e de *quadrado* integrável, mostra-se da ortogonalidade dos senos que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ onde b são os coeficientes da expressão seno de f. (Na demonstração calcula-se $\int_0^\pi f^2 = \int_0^\pi f \cdot f$, expandindo cada factor f na sua série de senos, multiplicando as duas séries e integrando termo a termo. Devido à ortogonalidade, a maioria dos integrais dá zero, correspondendo os outros ao membro direito da fórmula.)

Agora a ideia-chave é reparar que esta soma de quadrados é análoga à que aparece no teorema de Pitágoras da geometria euclidiana.

De acordo com a geometria euclidiana elementar, se P é um ponto com coordenadas (x, y) no plano ou (x, y, z) no espaço, então, o vector OP, da origem até P, tem um comprimento cujo quadrado é igual, respectivamente, a

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2$$

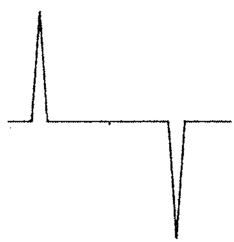
ou

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Esta analogia sugere que se pense na função f como um vector numa espécie de espaço supereuclidiano, com coordenadas rectangulares (ortogonais) b_1, b_2, b_3, etc. É claro que será um espaço de dimensões infinitas. O «comprimento» de f terá uma definição natural como sendo a raiz quadrada de $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2$, que é o mesmo que a raiz quadrada de $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$ A «distância» entre duas funções f e g será dada pelo «comprimento» de $f - g$.

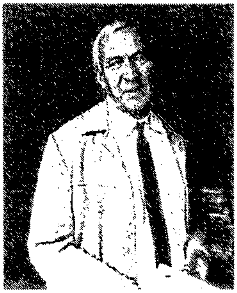
O espaço de funções assim definido é designado por L_2, sendo o mais antigo e o exemplo mais comum de uma classe de espaços abstractos conhecidos por espaços de Hilbert. O 2 de L_2 é devido ao expoente que aparece no quadrado da função. O L lembra-nos que devemos fazer a integração tendo em conta a medida de Lebesgue. Agora temos uma nova interpretação para a convergência da série de Fourier; queremos que a soma dos primeiros 10 000 termos (ou 100 000, ou 1 000 000, se necessário) seja próxima de f, tendo em conta a noção de distância em L_2. Isto é, a diferença deve ser pequena quando elevada ao quadrado e integrada.

Do ponto de vista do espaço de Hilbert, as subtilezas e dificuldades da análise de Fourier parecem evaporar-se. Agora os factos têm uma formulação e uma demonstração simples: uma função pertence a L_2 (isto é, é de quadrado integrável) se, e apenas se, a sua série de Fourier for convergente em L_2. (Este facto entrou na história como o teorema de Riesz-Fischer.)



Este gráfico representa uma função próxima de zero no sentido do espaço de Hilbert, L_2 mas não segundo o conceito de distância entre curvas. Os picos são insignificantes em L_2 porque a área que contêm é muito pequena

Restava ainda, no entanto, uma questão em aberto: até que ponto pode ser mau o comportamento pontual de funções de L_2. Tendo em conta o exemplo de Kolmogorov, uma função integrável cuja série de Fourier diverge em todos os pontos, houve um grande entusiasmo quando, em



Andrei Kolmogorov
1903-1987

Norbert Wiener
1894-1964

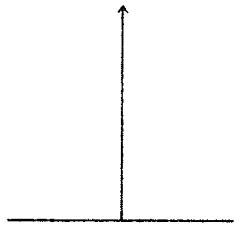
1966, Lennart Carleson provou que, se uma função é de *quadrado* integrável, então a sua série de Fourier *converge* pontualmente em quase todos os pontos. Tal inclui como caso especial o novo resultado que estabelece que uma função periódica contínua tem uma série de Fourier que converge em quase todos os pontos. A teoria foi acabada quando, também em 1966, Katznelson e Kahane mostraram que, dado qualquer conjunto de medida nula, existe uma função contínua cuja série de Fourier diverge nesse conjunto.

É interessante notar que este desenvolvimento mais recente implica, na realidade, uma nova evolução do conceito de função. Pois um elemento de L_2 não é uma função, nem na noção de Euler de expressão analítica, nem no sentido de Dirichlet de uma regra ou aplicação que associa um conjunto de números a um outro conjunto. É como uma função na medida em que um elemento de L_2 pode ser sujeito a operações normalmente aplicadas às funções (soma, multiplicação, integração). Porém, uma vez que permanece inalterada se mudarmos os seus valores num conjunto arbitrário de medida nula, certamente não é apenas uma regra que atribui valores a cada ponto do seu domínio.

Como vimos, o desenvolvimento da análise de Fourier no século XIX atingiu rigor lógico. O preço foi uma certa separação entre os pontos de vista puro e aplicado. Esta separação ainda existe, mas o impulso do muito trabalho recente e contemporâneo é no sentido de reunir estes dois aspectos da análise de Fourier.

Primeiro que tudo, o conceito de espaço de Hilbert, abstracto como é, pertence aos fundamentos da mecânica quântica. Por isso, tem sido um dos tópicos essenciais da matemática aplicada nos últimos cinquenta anos. Além disso, as mais importantes generalizações da análise de Fourier, a análise harmónica generalizada de Norbert Wiener e a teoria das funções generalizadas de Laurent Schwartz, são directamente motivadas por aplicações muito concretas. Por exemplo, em engenharia electrónica pensa-se muitas vezes num circuito como sendo fechado instantaneamente. Nesse caso, a corrente saltaria de zero, antes de fecharmos o interruptor, para um valor diferente de zero (por exemplo, 1), depois de

fecharmos o interruptor. É evidente que a razão de variação da corrente no instante do fecho não é finita. Em termos geométricos, o gráfico da corrente é vertical em $t = 0$. De qualquer modo, é muito conveniente utilizar nos cálculos uma razão de variação fictícia, que é infinita em $t = 0$ (função delta de Dirac). A teoria das funções generalizadas dá-nos um fundamento lógico para a utilização de tais funções «impulso», ou pseudofunções. Esta teoria permite-nos diferenciar *qualquer* função tantas vezes quantas quisermos; a única questão reside em admitirmos que o objecto resultante seja, não uma função genuína, mas uma «função generalizada». Numa perspectiva histórica, o interessante é que o conceito de função teve de ser alargado ainda mais, para além das noções quer de Dirichlet, quer de Hilbert.



A função Delta de Dirac é zero, excepto num único ponto, onde é infinita. Na análise moderna até esta «função» muito excêntrica pode ser expressa como uma série infinita de co-senos

Mas, mais do que isso, um dos resultados deste alargamento é que num certo sentido podemos voltar ao espírito de Fourier. Quando construímos a expansão de Fourier de uma destas «funções generalizadas», obtemos uma série ou integral que é divergente em qualquer das noções que considerámos. Mesmo assim, manipulações formais ao estilo de Euler ou Fourier têm muitas vezes, no contexto da nova teoria, significado e são seguras.

Os matemáticos trabalharam um século e meio para justificar alguns dos cálculos de Fourier. Por outro lado, poucos físicos e engenheiros sentiram alguma vez a necessidade de justificações. (Afinal, um aparelho que funcione ou uma experiência bem-sucedida falam por si.) Todavia, parecem encontrar agora algum conforto na segurança que os matemáticos trouxeram. Recentemente, em livros de texto sobre aplicações, as primeiras páginas estão levemente salpicadas de referências a Laurent Schwartz, como que a justificarem cálculos anteriormente «ilícitos».

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

F. J. Arago; E. T. Bell [1937]; J. W. Dauben; I. Grattan-Guiness; R. E. Langer; G. Weiss.

6

Ensinar e aprender

Confissões de um professor de Matemática do ensino preparatório?

Ted Williams (pseudónimo) é o presidente do Departamento de Matemática de uma boa escola privada da Nova Inglaterra. Foi entrevistado em Abril de 1978.

Williams, que tem 40 e poucos anos, ensina matemática, física e ciências. Também treina a equipa masculina de basebol. Diz que prefere ensinar matemática, em vez de física, porque é díficil manter-se a par dos novos desenvolvimentos em física. Williams tem um mestrado em Matemática tirado numa universidade da Ivy League e um curso introdutório à filosofia. Em relação à filosofia da ciência, informou o entrevistador de que alguns anos antes lera *Science and Hypothesis* de Poincaré e, recentemente, o livro de Minsky sobre perceptrões (mas afirma que não o percebeu). Leu também o livro de Bronowski, que corresponde à série de televisão. Leu um pouco de história da matemática. Afirma que na escola esperam que desempenhe muitas tarefas e, por isso, tem pouco tempo para ler.

Williams declara que a história e a filosofia da matemática raramente são assuntos discutidos nas suas aulas.

Respondendo a uma pergunta sobre se a matemática é descoberta ou inventada, responde rapidamente: «Não existe muita diferença entre as

duas. Porquê perder tempo a pensar nisso? O que importa é que a matemática é divertida. É isso que tento transmitir aos miúdos.»

Quando se insiste na pergunta, responde: «Bem, penso que é descoberta.»

Quando se lhe pergunta se já alguma vez pensou sobre a consistência da matemática, afirma: «Já ouvi falar do paradoxo de Russel e dessas coisas, mas não percebo bem. Penso que a matemática é como um castelo de areia. É muito bonito, mas é feito de areia.»

— Se é feito de areia, como justifica o estudo da matemática aos seus alunos?

— Digo-lhes que os números não mentem. Você sabe que é verdade. Ninguém encontrou exemplos para mostrar que os números podem mentir. Mas toda essa questão é irrelevente para mim.

Ao responder à pergunta sobre se existe uma diferença entre matemática pura e aplicada, Williams diz: «A matemática pura é um jogo. É divertido jogá-lo. Joga-se só pelo jogo. É mais divertido do que aplicá-la. A maior parte da matemática que ensino nunca é usada por ninguém. Nunca. Não há matemática nas belas-artes. Não há matemática em inglês. Quase não há matemática na gestão de um banco. Mas eu gosto da matemática pura. O mundo da matemática é lindo e limpo. A sua maravilhosa clareza é impressionante. Não existem ambiguidades.»

— Mas existem aplicações matemáticas?

— Claro que sim.

— Porque é a matemática aplicável?

— Porque a Natureza segue leis maravilhosas. Os físicos não foram longe antes de existir a matemática.

— Será que o número π existe independentemente das pessoas? Será que o pequeno homem verde da galáxia X-9 sabe da existência do π?

— À medida que ficamos mais velhos, preocupamo-nos cada vez menos com esse género de questões.

— Existe beleza na matemática?

— Oh! Sim. Por exemplo, se começarmos com uns poucos axiomas numa determinada área, conseguimos uma poderosa teoria completa. É giro ver uma teoria crescer do nada.

O Sr. Williams referiu o facto de a sua escola ter agora adquirido um computador e de ele estar a ensinar programação.

— Qual é o objectivo da computação?

— Ninguém nos liceus pergunta «porquê». Está lá. É divertido.

— A programação é uma forma de matemática?

— Não. A programação é pensamento... não é matemática.

— Existe intuição matemática?

— Sim, claro. Encontramo-la nos estudantes. Alguns são mais rápidos do que outros. Alguns têm mais. Alguns têm menos. Pode ser desenvolvida, mas isso exige trabalho. A matemática é padrões. Se uma pessoa é cega, está em desvantagem. Se se está «sintonizado», então, aprende-se depressa e o assunto é fascinante. De outro modo, é aborrecido. Existem muitas áreas da matemática que me aborrecem. É claro que não as entendo.

— Existe algum aspecto místico na matemática?

— A matemática está cheia de símbolos misteriosos e isso é uma atracção. Se falarmos a um «verdadeiro» matemático, vê-se que ele é esperto. E ele descobre alguns segredos. Por causa disso, sabemos um pouco mais. Sentimo-nos pequenos e intimidados por este conhecimento maior.

— Quais são as direcções da investigação em matemática?

— Não faço a mínima ideia.

— Como é que resumia tudo isto?

— Enquanto professor, sou confrontado com problemas atrás de problemas que não têm relação alguma com a matemática. O que tento fazer é vender a matemática aos miúdos, dizendo-lhes que é divertida. Assim, desta maneira, vou passando as semanas.

A crise clássica da compreensão e pedagogia na sala de aula

> O cruel esoterismo, no qual até o melhor de nós às vezes cai; a preponderância, na nossa escrita corrente, daqueles livros de texto entediantes, que, devido a maus conceitos de ensino, substituem a verdadeira síntese; a curiosa modéstia que, assim que nos encontramos fora do gabinete, nos parece impedir de expor a honesta pesquisa dos nossos métodos perante um público profano [...]
>
> MARCH BLOCH, *The Historian's Craft*

Introdução

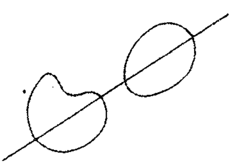
Em todas as aulas de Matemática da faculdade uma determinada fracção do tempo é dedicada à demonstração de teoremas. Esta fracção é, provavelmente, tanto maior quanto mais profundo ou mais abstracto

for o assunto. Um dos objectivos da demonstração é convencer os estudantes, através da razão, da psicologia e da intuição, da verdade de certas afirmações. Muitas vezes, em cadeias mais elementares — e isto acontece com todos os professores — um aluno honesto e confuso interrompe a demonstração com o grito «não percebo por que fez o que fez e não entendo por que diz que é assim; além disso, não compreendo por que se faz assim».

O professor é confrontado com uma crise de compreensão. Como vai resolvê-la? Não muito bem, infelizmente. Talvez o professor reveja o ponto crítico em termos um pouco diferentes ou, devido à extensão da matéria, afaste a questão com o comentário de que o aluno compreenderá se estudar por si em casa.

No meio de uma aula de uma disciplina sobre a natureza da matemática (da qual este livro é, em parte, extraído) aconteceu uma dessas crises. A minha reacção imediata foi a descrita acima. Mas apercebi-me disso e recuei a tempo. Em vez de passar por cima da crise, alterei completamente o plano das aulas até ter explorado a dificuldade matemática e a respectiva resposta, do modo exposto a seguir.

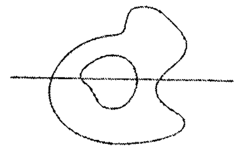
O problema das duas panquecas



O teorema que discutíamos e cuja demonstração gerou a crise é muitas vezes conhecido como «o problema das duas panquecas». O teorema afirma que as áreas de duas panquecas planas de forma arbitrária podem ser bissectadas simultaneamente por um único corte em linha recta (v. figura). Este interessante teorema faz parte da teoria elementar de variável real ou topologia elementar. É muitas vezes dado como uma aplicação das propriedades das funções contínuas. Uma das coisas que atraem tanto neste teorema é a sua generalidade. As panquecas não têm de ter nenhuma forma particular, como, por exemplo, circular, quadrada ou elíptica. Até podem ter buracos. O preço a pagar por esta generalidade é que o teorema só tem uma natureza existencial: diz-nos que existe um corte linear que bissecta as panquecas, mas não nos ensina exactamente como fazer esse corte. Tal não é possível sem termos informações numéricas em relação à forma precisa e à localização das panquecas.

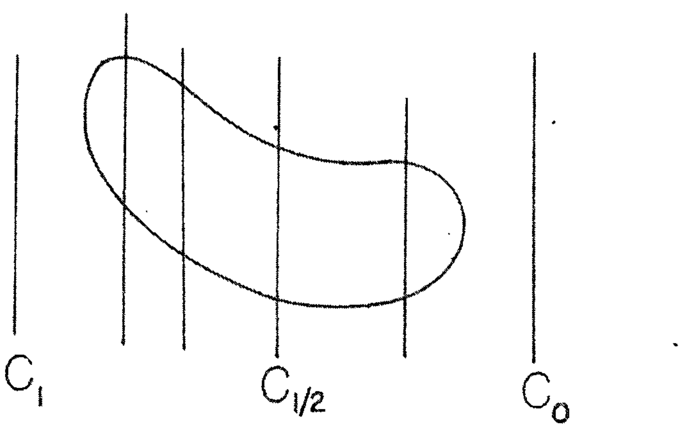
O teorema é simples e despreocupado. Tem um grande efeito visual e estético. Podemos imaginar-nos a traçar rectas atrás de rectas num processo por tentativas.

Não conheço nenhuma aplicação prática deste teorema, mas não excluo essa possibilidade. Há uma série de casos especiais e generalizações. Por exemplo, as panquecas podem estar em qualquer posição no plano. Podem estar sobrepostas. Se uma está totalmente contida na outra, então, podem ser interpretadas como uma ilha num lago. Existe uma linha recta que bissecta simultaneamente as duas áreas. Generalizando para três dimensões, tem-se o famoso teorema da sanduíche de fiambre: uma sanduíche que consiste numa fatia de pão normal, uma fatia de fiambre e uma fatia de pão integral. Existe um corte segundo um plano que bissecta simultaneamente o volume das três, de modo que duas pessoas possam dividir a sanduíche de forma igual.



Demonstração: primeira versão

Apresento agora a demonstração, mais ou menos como a fiz na aula, na forma que originou a crise. O modelo utilizado é a demonstração publicada no livro de Chinn e Steenrod. As noções de área e das suas propriedades de continuidade são consideradas intuitivas. Admitimos que as panquecas têm um tamanho limitado. Consideremos uma das panquecas. Se começarmos com um corte que não a intersecte (C_1), toda a área estará para um dos lados desse corte. À medida que movemos a faca paralelamente ao primeiro corte, cada vez menos área estará desse lado. Por fim, o corte (C_0) já não intersecta a panqueca



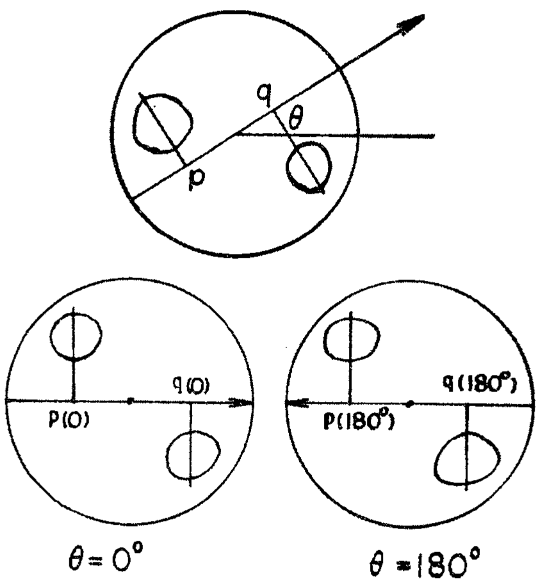
outra vez e a área do lado que temos vindo a considerar é nula (v. figura). Quando a faca se move continuamente, de C_1 a C_0, a área desse lado vai variando também continuamente, decrescendo de 100% em C_1 até 0% em C_0. Assim, deve existir uma posição única, $C_{1/2}$, onde a área é bissectada.

Temos então o seguinte *lema:* dada uma direcção arbitrária (θ) no plano: $0 \leq \theta \leq 180°$, existe um único corte nessa direcção (ou perpendicular a essa direcção) que bissecta a panqueca.

Estamos agora preparados para o teorema completo.

Desenha-se uma circunferência arbitrária que contenha as duas panquecas. Utiliza-se esta circunferência como sistema de referência. Marca-se o centro e desenham-se diâmetros (passando pelo centro) com ângulos θ, onde θ varia entre 0° e 180°. Para cada θ existe um único corte perpendicular ao raio θ que bissecta a panqueca I. Esse corte intersecta o raio θ a uma distância $p(\theta)$ da origem. Seja $q(\theta)$ definido de modo semelhante para a panqueca II.

Considere-se agora $r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$. [Este foi o ponto de crise: gritos de «porquê?, não compreendo!, pode repetir!, estou confuso!».



A primeira resposta do professor: «Vá lá, considerem $p(\theta) - q(\theta)$. Verão que funciona! Deixem-me prosseguir!»] Considerem $p(\theta) - q(\theta)$ à medida que θ varia entre 0° e 180°. Os raios θ = 0° e θ = 180° são linhas idên-

ticas com sentidos opostos. Por outro lado, as posições dos bissectores de I e II são iguais, mas o valor de $p(180°)$ é oposto ao de $p(0°)$. Portanto, $p(180°) = -p(0°)$. Do mesmo modo, $q(180°) = -q(0°)$. Logo, $r(0°) = p(0°) - q(0°)$ e $r(180°) = p(180°) - q(180°)$, assim como $r(180°) = -r(0°)$. Só há duas hipóteses: (*a*) $r(0°) = 0$ ou (*b*) $r(0°) \neq 0$. Se (*a*) $r(0°) = 0$, então $p(0°) = q(0°)$, o que significa que os bissectores de I e II coincidem, obtendo-se a relação desejada com um corte. Se (*b*) $r(0°) \neq 0$, então $r(\theta)$ muda de sinal quando θ varia de 0° até 180°. Esta mudança é contínua; por isso, tem de existir uma posição θ onde $r(\theta) = 0°$. Neste ponto $p(\theta) = q(\theta)$, o que nos dá a solução para o problema, uma vez que os dois cortes são, na realidade, coincidentes.

A reacção do professor

A minha primeira reacção à crise foi pensar: porque ocorreu exactamente naquele ponto? Numa «mera» definição, que até nem era a parte mais complicada. Bem, talvez fosse a última gota de água. Tínhamos acumulado alguns pontos mais complexos. O lema parece ter sido fácil. Desenhar uma circunferência à volta das panquecas foi misterioso. A medição das abcissas ao longo do raio foi complicada. Os símbolos $p(\theta)$, $q(\theta)$, despertam toda a insegurança da inexperiência na utilização da notação funcional. Revendo a demonstração de acordo com o exposto acima, fiquei com a sensação de que, no máximo, tinha conseguido convencer a minha turma a aceitar o teorema sem compreender a demonstração. Também se tornou claro que, após se ter gerado esta barreira inicial, ela não seria clarificada repetindo simplesmente a demonstração, mesmo com o mais ínfimo pormenor. Era necessária uma nova abordagem.

Documentação acerca do processo de descoberta

Diz-se, por vezes, que o caminho para a compreensão é o caminho original da descoberta. Isto é, se se conhece o modo como algo foi pensado pela primeira vez, essa é uma boa maneira para apresentar o assunto numa aula. Isto não é necessariamente verdade, pois a descoberta inicial pode ter sido obscura, desnecessariamente complicada ou escondida num contexto totalmente diferente. Pode também acontecer que uma apresentação inteligente e moderna esteja obscurecida por generalidades e que uma demonstração anterior traga uma compreensão muito melhor.

Por vezes, a melhor maneira de compreender é reconstruir a demonstração por nós próprios, segundo linhas ligeiramente diferentes (ou até novas). Deste modo, somos confrontados directamente com as dificuldades, assim como com as ideias brilhantes que as suplantam. Depois da crise, voltei para o meu escritório e construí (e documentei) uma demonstração ligeiramente diferente, que evitava o passo traumático: seja $r(\theta) = p(\theta) - q(\theta)$. Sabia que o raciocínio da mudança de sinal teria de aparecer, mas utilizá-lo-ia ligeiramente disfarçado.

Demonstração: segunda versão

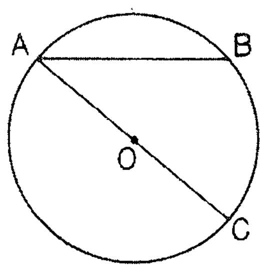
a) *Proporcionando uma intuição preliminar*

1. A área de um círculo é bissectada por qualquer diâmetro.

2. De modo inverso, qualquer bissector da área de um círculo deve ser um diâmetro.

O primeiro ponto é claro, mas o segundo pode ser um pouco menos claro. Se *AB* não é um diâmetro, desenha-se *AOC*, que é um diâmetro. O ângulo *BAC* torna evidente que a área acima de *AB* é inferior à de um semicírculo.

3. O problema dos dois círculos (isto é, bissectar simultaneamente as áreas de dois círculos) tem uma e uma só solução se os centros forem dis-



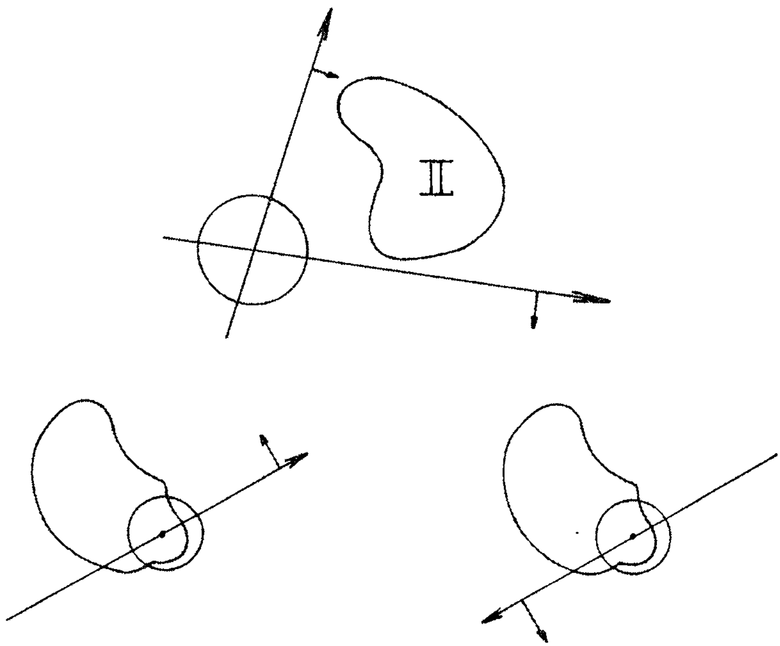
tintos. Pois o bissector das áreas tem de ser um diâmetro comum. Se os centros coincidirem, o problema dos dois círculos tem soluções infinitas.

4. *Corolário:* o problema dos três círculos, portanto o das três panquecas, não tem, em geral, solução. Porque um bissector comum dos três círculos tem de ser um diâmetro comum. Tal é impossível, a não ser que os três centros sejam co-lineares.

Este corolário é interessante porque põe limites às generalizações do problema. O conhecimento desses limites aumenta o valor da afirmação original.

b) ***O problema adensa-se***

Mantemos um círculo, mas permitimos que o outro seja uma panqueca de forma arbitrária, designada por II. Suponhamos que a panqueca está totalmente fora do círculo. Para bissectarmos o círculo, precisamos de um diâmetro; portanto, desenhamos um. Marca-se uma seta nesse diâmetro e desenha-se outra seta perpendicular ao diâmetro, criando um



sistema de coordenadas que distingue um lado do diâmetro do outro. Seja $p(\theta)$ a percentagem da área da panqueca II que está do lado que contém a seta. É evidente que, quando o diâmetro roda de um lado de II até ao outro, $p(\theta)$ varia de 100% até 0%. Por continuidade existe um ponto onde é 50%.

Bem, e se o círculo e a panqueca estiverem sobrepostos, de modo que não seja possível ir de 100% até 0%? Bem, nesse caso não restringimos a rotação do diâmetro, deixamo-lo completar uma rotação $0° \leq \theta \leq 180°$! Os diâmetros são idênticos; contudo, a orientação é inversa, pelo que (ah!) $p(0) + p(180°) = 100\%$. Assim, se, por exemplo; $p(0) = 43\%$ e $p(180) = 57\%$, então, existirá um θ intermédio com $p(\theta) = 50\%$.

c) ***A conclusão***

Libertemo-nos do círculo; consideremos duas panquecas arbitrárias. Bissecta-se a panqueca I (de acordo com o lema) através de uma linha com orientação e paralela à direcção θ. Designa-se por $p(\theta)$ a percentagem da área de II do lado da seta do bissector. Temos, como há pouco, $p(0) + p(180°) = 100\%$, sendo, consequentemente, a conclusão válida no caso geral.

Esta segunda versão assentou bem. Pareceu-me melhor do que a primeira. Talvez fosse devido à exposição anterior. Talvez estivesse mais seguro na minha própria mente — era algo que tinha, de facto, pensado e construído por mim próprio. De qualquer modo, pareceu-me que tinha conseguido um maior nível de compreensão, e a turma passou a uma discussão sobre outros aspectos da crise.

Os livros de estudo

Porque são os livros de estudo e as monografias de matemática tão difíceis de perceber? Um leigo pode pensar que um matemático treinado consegue ler de relance uma página de matemática, tal como Liszt conseguia ler uma página de música difícil para piano. Raramente isso é verdade. A compreensão de uma página de matemática por um profissional é muitas vezes um processo lento, entediante e problemático.

A apresentação nos livros é muitas vezes «de trás para a frente». O processo de descoberta é eliminado da descrição e não é documentado. Depois de se construir o teorema e a sua demonstração, por um qualquer caminho e através de quaisquer meios, toda a apresentação verbal e simbólica é reordenada, polida e reorganizada de acordo com os cânones do método lógico-dedutivo. A estética do ofício exige-o. Precedentes históricos — a tradição grega — exigem-no. É também verdade que a lógica do negócio dos livros exige o máximo de informação no mínimo de espaço. A matemática tende a conseguir essa lógica com extrema perfeição. A brevidade é a alma do brilhantismo e do espírito matemático. Explicações mais pormenorizadas são consideradas entediantes.

Apresentações autoritárias ou dogmáticas

As demonstrações matemáticas, quer em livros, quer nas aulas, são muitas vezes vistas como autoritárias, e tal pode originar um ressentimento por parte dos alunos. Idealmente, o ensino da matemática diz: «Venham, vamos raciocinar em conjunto.» Porém, o que sai da boca do

professor é muitas vezes: «Oiçam, digo-lhes que é assim.» Isto é demonstração por coerção. Existem várias razões para isto acontecer. Primeiro que tudo, temos pouco tempo. Temos de cobrir (ou julgamos que temos) uma certa matéria num semestre, de maneira que o aluno esteja preparado para a próxima disciplina de matemática ou física. Assim sendo, não temos possibilidades de nos deter calmamente em nenhuma das dificuldades; pelo contrário, temos de correr sem parar até concluirmos o programa.

Depois existe o desejo, que alguns professores têm, de parecerem brilhantes. (O que estou a dizer é bastante fácil e óbvio para mim; portanto, se não estão a perceber, devem ser mesmo palermas.)

No reverso da medalha, o professor pode estar mal preparado ou não saber a matéria, o que o obriga a seguir muito de perto o livro de texto. Tais professores podem não ter uma verdadeira compreensão do assunto.

A alguns falta segurança como matemáticos e podem, ele próprios, sentir-se apavorados com a autoridade do texto ou com a reconhecida monografia. E não sabem como «contorná-lo», ou, se sabem, têm medo de ensiná-lo.

Resistência dos estudantes

Quais são algumas das razões para a resistência, o ressentimento e a rejeição dos estudantes?

Antes de mais, há uma impaciência considerável em relação ao assunto em estudo. Surpreendentemente, isto é muitas vezes notório nos melhores alunos. Os melhores alunos têm tendência para exigir compreensão imediata. A matemática sempre foi fácil para eles. A compreensão e a intuição sempre foram fáceis. Agora, à medida que entram em assuntos mais complexos da matemática, a matéria começa a tornar-se difícil. Falta-lhes experiência. Faltam-lhes estratégias. Não sabem como «dar a volta» aos problemas. A compreensão é dolorosa. Não os impressiona nada dizer que o assunto que vai ser apresentado é o resultado final de séculos de estudos de dezenas ou centenas de pessoas brilhantes. O desejo de compreensão imediata é muito forte e pode ser, em última instância, contraproducente. (Se não percebo agora, nunca vou conseguir; mais vale desistir.)

A ideia fulcral é muitas vezes brilhante, mas difícil. Talvez exista resistência psicológica em aceitar que no mundo há inteligências e mentes brilhantes que podem excedê-los. Pode haver uma revelação repentina de que alguma matemática, de nível mais elevado, os ultrapassa com-

pletamente, sendo esta revelação um choque e um golpe para o seu ego. A resistência pode aumentar e revelar-se como falta de estudo, falta de interesse e pouca disposição para embarcar num processo de descoberta próprio.

Pensa-se muitas vezes que existem pessoas com «jeito matemático» e outras «sem jeito matemático». Ninguém sabe por que motivo algumas pessoas têm uma inclinação para a matemática, enquanto, para outras, esta área é extremamente difícil. Para os não matemáticos a resistência pode ser a reacção honesta devida a limitações inatas. Nem toda a gente se torna pianista ou patinador. Porque devia ser diferente com a matemática?

O cerne da questão

A ideia genial, o avanço fundamental, o «ah!» simbolizam algo que nasce e que é genuinamente novo, uma nova compreensão para o indivíduo, um novo conceito que é posto perante a comunidade. A criatividade existe e acontece todos dias. Não está distribuída equitativamente por todas as pessoas, mas existe em grande quantidade. Não é compreendida, mas, dentro de certos limites, pode ser aumentada ou diminuída. Dentro de certos limites pode ser ensinada. Mas toda a gente tem limitações, toda a gente fica frustrada e baralhada com desenvolvimentos mais gloriosos, e a prova disso está à nossa volta, basta observar que a vida e a matemática estão cheias de problemas por resolver. O nascimento de uma nova ideia — o que é isso? Uma mutação intelectual? Um estado de graça? Uma dádiva dos deuses?

Hoje em dia existem muitos estudos e experiências com o objectivo de elucidarem o cerne da percepção intelectual e da geração de ideias. Existem, inclusive, esforços para a automatizar por computador, para a tornar ainda mais proveitosa, para transformar o nosso tempo num dos grandes períodos da história.

E, no entanto, é evidente que aprendemos através de exemplos e ensinamentos, sentando-nos aos pés dos mestres e imitando o que eles fazem, e é igualmente óbvio que os mestres conseguem transmitir-nos alguma da sua estratégia e percepção. Vamos examinar alguns casos concretos.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

Chinn e Steenrod; J. Hadamard.

A arte da descoberta de Pólya

A minha mente foi atingida por um raio de luz com o qual os seus desejos foram satisfeitos.

DANTE, *Paraíso*, canto XXXIII
(citado por G. Pólya)

George Pólya (1888-1985) teve uma carreira científica que se prolongou por mais de sete décadas. Pólya foi não só um matemático brilhante que deu contribuições fundamentais em muitos domínios, como também um professor brilhante, um professor de professores e um grande conferencista. Pólya acreditava que existe uma arte da descoberta. Ele acreditava que a capacidade de descobrir e a capacidade de inventar podem ser desenvolvidas através de um ensino habilidoso que alerte os estudantes para os princípios da descoberta e que lhes dê uma oportunidade de praticarem estes princípios.

George Pólya
1888-1985

Numa série de livros espantosos de grande riqueza, o primeiro dos quais foi publicado em 1945, Pólya cristalizou da sua vasta experiência esses princípios da descoberta e invenção e partilhou-os connosco através de regras e exemplos. Estes livros são um repositório riquíssimo de estratégias, conhecimentos, regras empíricas, bons conselhos, anedotas, história matemática, juntamente com problema atrás de problema de todos os níveis e todos com um interesse matemático invulgar. Pólya descreve um plano global de como os resolver *(how to solve it)* no fim do seu livro com esse nome:

COMO RESOLVÊ-LOS

Primeiro: tem de *compreender* o problema.

Segundo: encontre a relação entre os dados e o que quer saber. Pode ver-se obrigado a considerar problemas auxiliares se não conseguir encontrar uma relação imediata. Eventualmente, deve obter um *plano* para a solução.

Terceiro: *realize* o plano.

Quarto: *examine* a solução obtida.

Estas regras são depois subdivididas até ao nível «molecular». São então sugeridas estratégias individuais que podem ser utilizadas nas alturas apropriadas, por exemplo:

- Se não consegue resolver o problema proposto, deve procurar um problema relacionado que seja apropriado.
- Trabalhe de trás para a frente.
- Trabalhe da frente para trás.
- Estreite a condição.
- Alargue a condição.
- Procure um contra-exemplo.
- Adivinhe e experimente.
- Divida para conquistar.
- Mude de concepção.

Cada um destes princípios heurísticos é acentuado por numerosos exemplos específicos.

Outros investigadores desenvolveram as ideias de Pólya de diversas maneiras. A. H. Schoenfeld compilou uma interessante tabela dos princípios heurísticos mais frequentemente usados na matemática de nível universitário. Apresentamo-la a seguir:

PRINCÍPIOS HEURÍSTICOS USADOS FREQUENTEMENTE*

Análise

1. Desenhe um diagrama, se lhe for possível.
2. Examine casos especiais:

    a) Escolha valores particulares para exemplificar o problema e se habituar a ele.
    b) Examine casos-limites para explorar o conjunto de todas as possibilidades.
    c) Iguale eventuais parâmetros inteiros a 1, 2, 3, ..., em sequência e procure um padrão indutivo.

3. Tente simplificar o problema:

    a) Explorando as simetrias; ou
    b) Com argumentos de «sem perda de generalidade» (incluindo novas escalas).

---

* De A. H. Schoenfeld.

Exploração

1. Considere problemas que sejam essencialmente equivalentes:

   a) Substituindo condições por outras equivalentes.
   b) Recombinando os elementos do problema de maneiras diferentes.
   c) Introduzindo elementos auxiliares.
   d) Reformulando o problema através:

      i) De uma mudança de perspectiva ou de notação.
      ii) De argumentos por contradição ou negação.
      iii) Da suposição da existência de uma solução e determinando as suas propriedades.

2. Considere problemas ligeiramente modificados:

   a) Escolha objectivos intermédios (satisfaça parcialmente as condições).
   b) Enfraqueça uma condição e depois tente impo-la outra vez.
   c) Decomponha o domínio do problema e trabalhe caso a caso.

3. Considere problemas muito modificados:

   a) Construa um problema análogo com menos variáveis.
   b) Mantenha todas as variáveis fixas, excepto uma, para descobrir a importância desta.
   c) Tente explorar qualquer problema que tenha em comum:

      i) A forma.
      ii) Os «dados».
      iii) As conclusões.

Recorde-se: quando trabalhar com problemas relacionados, mas mais fáceis, tem de tentar explorar tanto o *resultado* como o *método de solução* no problema dado.

Verificando a solução

1. Será que a solução satisfaz estes testes específicos:

   a) Utiliza todos os dados pertinentes?
   b) Está de acordo com previsões e estimativas razoáveis?
   c) Será que ultrapassa testes de simetria, de análise de dimensões ou de escala?

2. Será que satisfaz estes testes gerais?

   a) Pode ser obtida de modo diferente?
   b) Pode ser comprovada por casos particulares?
   c) Pode ser reduzida a resultados já conhecidos?
   d) Pode ser utilizada para gerar alguma coisa conhecida?

Para saborearmos um pouco do pensamento e da escrita de Pólya num caso muito belo e subtil, um caso que envolve a mudança do modo conceptual, vou transcrever um texto da sua obra *Mathematical Discovery* (vol. II, pp. 54 e segs.):

Exemplo

Vou tomar a liberdade de tentar uma pequena experiência com o leitor. Vou apresentar um teorema simples, mas não muito comum, da geometria e depois vou tentar reconstruir a sequência de ideias que levou à sua demonstração. Vou avançar devagar, muito devagar, revelando gradualmente uma pista de cada vez. Penso que, antes de chegar ao fim da história, o leitor terá percebido a ideia central (a não ser que haja alguma circunstância especial). Mas esta ideia principal é um pouco inesperada e, assim, o leitor pode experimentar o prazer de uma pequena descoberta.

A) *Se três circunferências com o mesmo raio passam por um ponto, a circunferência que passa pelos outros três pontos de intersecção também tem o mesmo raio.*

Este é o teorema que temos de demonstrar. A afirmação é curta e clara, mas não apresenta os pormenores de um modo suficientemente simples. Se *desenharmos uma figura* (figura 10.1) e *introduzirmos a notação conveniente*, chegaremos a uma formulação mais explícita (que se segue).

B) *Três circunferências* k, l *e* m *têm o mesmo raio* r *e passam pelo mesmo ponto* O. *Além disso,* l *e* m *intersectam-se no ponto* A, m *e* k *em* B *e* k *e* l *em* C. *Então a circunferência* e *que passa em* A, B *e* C *também tem raio* r.

A figura 10.1 mostra as quatro circunferências *k, l, m* e *e* e os seus quatros pontos de intersecção *A, B, C* e *O.* No entanto, a figura ainda é insatisfatória, porque não é simples e é incompleta; parece faltar algo; pelo menos, parece que nos esquecemos de ter em conta algo essencial.

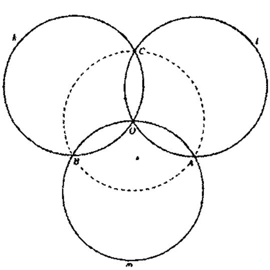


***Figura 10.1** — Três círculos passam no mesmo ponto*

Estamos a trabalhar com circunferências. O que é uma circunferência? Uma circunferência é determinada pelo centro e pelo raio; todos os seus pontos estão à mesma distância do centro, correspondente ao comprimento do raio. Esquecemo-nos de introduzir o raio comum *r,* pelo que não tomámos em consideração uma parte essencial da hipótese. Vamos, por isso, introduzir os centros *K* de *k, L* de *l* e *M* de *m.* Onde devemos representar o raio *r?* Não parece existir nenhuma razão para tratar

de modo especial qualquer das circunferências dadas *k, l* e *m* ou qualquer dos três pontos de intersecção *A, B* e *C.* Somos levados a unir os três centros com todos os pontos de intersecção dos respectivos círculos: *K* com *B, C* e *O,* e assim por diante.

A figura resultante (figura 10.2) é desconcertantemente complicada. Tem tantas linhas, rectas e circulares que temos grande dificuldade em «ver» bem a figura; não «fica quieta». É semelhante a certos desenhos de revistas antiquadas. O desenho é ambíguo de propósito; representa uma certa figura se olharmos para ele da maneira usual, mas, se o virarmos para uma certa posição e olharmos para ele de um modo peculiar, de repente, surge-nos outra figura, sugerindo um comentário mais ou menos espirituoso em relação à primeira. Consegue reconhecer na nossa figura, cheia de segmentos de recta e círculos, uma segunda figura que toma forma?

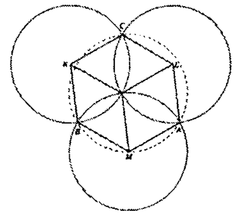


Figura 10.2 *— Demasiadas figuras*

[...]

Podemos reconhecer a figura escondida no nosso complexo desenho de repente ou gradualmente. Podemos ser levados a isso pelo esforço de resolvermos o problema proposto ou por alguma circunstância secundária e não essencial. Por exemplo, quando estamos a redesenhar a nossa figura insatisfatória, podemos reparar que a figura no seu *conjunto* é determinada pela sua *parte rectilínia* (figura 10.3).

Esta observação parece importante. Certamente simplifica a figura geométrica e, possivelmente, melhora a situação lógica. Leva-nos a reformular o nosso teorema da seguinte forma:

C) Se os nove segmentos

KO	KC	KB
LC	LO	LA
MB	MA	MO

são todos iguais a r, *existe um ponto* E *em que os três segmentos*

EA, EB, EC

são também iguais a r.

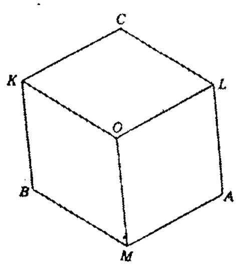


Figura 10.3 *— Faz-lhe lembrar... o quê?*

Esta formulação foca a nossa atenção na figura 10.3. Esta figura é atractiva, lembra-nos algo familiar. (O quê?)

É claro que alguns quadriláteros da figura 10.3, tal como *OLAM,* têm, por hipótese, quatro lados iguais, são losangos. Um losango é um objecto familiar; depois de o reconhecermos, podemos «ver» a figura melhor. (O que nos lembra a figura *completa*?)

Os lados opostos de um losango são paralelos. Com base nesta pista, percebemos que os nove segmentos da figura 10.3 são de três tipos; os segmentos do mesmo tipo, tal como *AL*, *MO* e *BK*, são paralelos entre si. (O que nos lembra *agora* a figura?)

Não podemos esquecer-nos da conclusão que procuramos. Vamos admitir que a conclusão é verdadeira. Introduzindo na figura o centro *E* do círculo *e* e os seus três raios até *A*, *B* e *C*, obtemos (supostamente) mais losangos e mais segmentos paralelos (v. figura 10.4). (O que nos lembra *agora* a figura completa?)

[...]

Claro! A figura 10.4 é a projecção das doze arestas de um paralelepípedo com a particularidade de a projecção de todas as arestas ter o mesmo comprimento. A figura 10.3 é a projecção de um paralelepípedo «não transparente»; vemos apenas três faces, sete vértices e nove arestas; três faces, um vértice e três arestas são invisíveis nessa figura. A figura 10.3 é só parte da figura 10.4, mas esta parte define a figura completa. Se o paralelepípedo e a direcção da projecção forem escolhidos de modo que as projecções das nove arestas representadas na figura 10.3 tenham todas um comprimento *r* (como deve ser, por hipótese), as projecções das três restantes arestas têm de ser iguais a *r*. Estas três linhas de comprimento *r* partem da projecção do oitavo vértice (invisível), sendo esta projecção *E* o centro de um círculo que passa pelos pontos *A*, *B* e *C* e tem raio *r*.

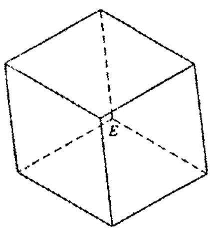


Figura 10.4 — *Claro!*

O nosso teorema fica demonstrado através de uma concepção artística surpreendente de uma figura plana como a projecção de um sólido.

(A demonstração utiliza noções da geometria dos sólidos. Espero que isto não seja um mal muito grande, mas, se for, tem uma solução fácil. Agora, que podemos caracterizar a situação do centro *E* de um modo tão simples, é directo examinar os comprimentos de *EA*, *EB* e *EC* independentemente de qualquer geometria de sólidos. No entanto, não vamos insistir aqui nesse ponto.)

Isto é muito bonito, mas ficamos pensativos. É esta a «luz que irrompe como a manhã», o raio de luz no qual o desejo é realizado? Ou é apenas esperteza saloia? Será que estas ideias funcionam na sala de aula? Tentativas para reduzir o programa de Pólya à pedagogia prática são difíceis de analisar. Aparentemente, ensinar é algo mais do que uma boa ideia de um mestre.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

I. Goldstein e S. Papert; E. B. Hunt; A Koestler [1964]; J. Kestin; G. Pólya [1945], [1954], [1962]; A. H. Schoenfeld; J. R. Slagle.

Uma aplicação da heurística de Lakatos

Imre Lakatos apresenta no seu *Proof and Refutations* um modelo para a «lógica da descoberta matemática». Um professor e a sua turma estão a estudar a famosa fórmula de Euler-Descartes para poliedros:

$$V - E + F = 2$$

Nesta fórmula V é o número de vértices de um poliedro, E o número de arestas e F o número de faces. Para os poliedros mais comuns, estas quantidades tomam os seguintes valores:

Leonhard Euler
1707-1783

	V	E	F
Tetraedro	4	6	4
Pirâmide (egípcia)	5	8	5
Cubo	8	12	6
Octaedro	6	12	8

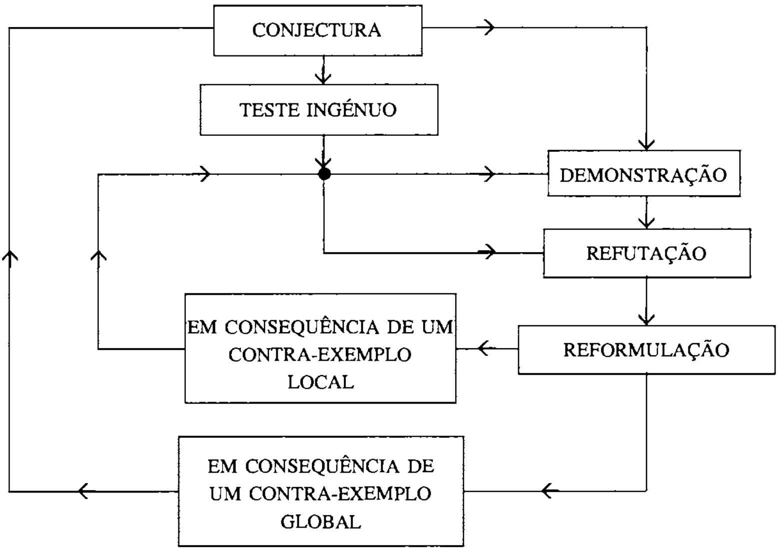
(V. também o capítulo 7, «Lakatos e a filosofia da dúvida».)

O professor apresenta a demonstração tradicional, na qual o poliedro é projectado no plano. Esta «demonstração» é imediatamente seguida por uma série de contra-exemplos apresentados pelos estudantes. Devido a estes contra-exemplos, a formulação do teorema é modificada e a demonstração é corrigida e melhorada. São dados novos contra-exemplos, feitos novos ajustamentos.

Este processo é apresentado por Lakatos como um modelo para o desenvolvimento do conhecimento matemático em geral.

O exemplo heurístico de Lakatos de demonstrações e refutações, que foi formulado para a cultura matemática em geral, pode naturalmente ser aplicado pelo indivíduo na sua tentativa de criar nova matemática. O autor tem utilizado o método com algum sucesso nas suas aulas. O choque inicial de apresentar aos estudantes, não um problema fixo a ser resolvido, mas uma situação de potencial descoberta em aberto, deve e pode ser ultrapassado. Os melhores estudantes experimentam uma sensação de entusiasmo e liberdade por estarem a controlar o assunto.

Vou ilustrar o método com um pequeno exemplo da teoria elementar de números:



Modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta matemática

Parto de uma afirmação a que chamo «semente». A afirmação *semente* deve ser interessante e bastante simples. O objectivo do exercício consiste em que o estudante regue a semente, de modo que esta se transforme numa robusta planta. Geralmente, apresento à turma várias sementes, e ela escolhe a que quer estudar, de acordo com a sua experiência.

Acto I

SEMENTE — «Se um número termina em 2, é divisível por 2.»

EXEMPLOS — 42 termina em 2 e é divisível por 2. 172 termina em 2 e é divisível por 2.

DEMONSTRAÇÃO — Um número é par se e só se termina em 0, 2, 4, 6, 8. Todos os números pares são divisíveis por 2. Em particular, aqueles que terminam em 2 são divisíveis por 2.

DEMONSTRAÇÃO (mais sofisticada) — Se o número é formado pelos dígitos *ab* ... *c*2, então, é claramente da forma (*ab* ... *c*0) + 2, logo da forma $10Q + 2 = 2(5Q + 1)$.

NOVA CONJECTURA — Se um número termina em *N*, é divisível por *N*.

COMENTÁRIO — É preciso ser ousado e fazer a generalização óbvia. O céu não cairá se for falsa.

EXEMPLO — Se um número termina em 5, é divisível por 5. Claro: 15, 25, 128095, etc. Mas...

CONTRA-EXEMPLO — Se um número termina em 4, será divisível por 4? 14 é divisível por 4? Não! Paciência!

OBJECÇÃO — Mas alguns números que terminam em 4 são divisíveis por 4: 24. Alguns números que acabam em 9 *são* divisíveis por 9: 99.

Recapitulemos o que sabemos: Os números 1, 2, ..., 9 parecem pertencer a duas categorias diferentes. *Categoria* I: os números N em que um número que termina em N é sempre divisível por N. *Categoria* II: os números N em que um número que termina em N só ocasionalmente é divisível por N.

Categoria I: 1, 2, 5

Categoria II: 3, 4, 6, 7, 8, 9

PONTO DE ORDEM — E o que se passa com números terminados em 0? Serão divisíveis por 0? Não. Mas são divisíveis por 10. Hum! Temos de ter cuidado com estes casos. Este fenómeno não se enquadra no enunciado da semente.

DEFINIÇÃO — Vamos chamar aos números da categoria I «números mágicos». Têm uma propriedade encantadora.

TENTATIVA DE TEOREMA — Os números 1, 2 e 5 são números mágicos. São os únicos números mágicos.

CONTRA-EXEMPLO — Então e o número 25? Não é mágico? Se um número termina em 25, é divisível por 25. Por exemplo, 225 ou 625.

OBJECÇÃO — Pensávamos que estava a falar de números de um único algarismo.

REFUTAÇÃO — Bem, inicialmente estávamos. Mas o fenómeno do 25 é interessante. Vamos alargar um pouco o nosso estudo inicial.

REFORMULAÇÃO — Seja N a representação, não necessariamente de um único algarismo, mas de um grupo de algarismos, como 23, 41, 505, etc. Temos a definição de que N é mágico se um número que termina no grupo de algarismos N é divisível por N. Será que esta definição alargada tem sentido?

EXEMPLO — Sim, tem. 25 é mágico, 10 é mágico, 20 é mágico, 30 é mágico.

CONTRA-EXEMPLO — 30 não é mágico. 130 não é divisível por 30. A propósito, como sabe que 25 é mágico?

TEOREMA — 25 é um número mágico.

DEMONSTRAÇÃO — Se um número termina em 25, tem a forma $abc \ldots e25 = abc \ldots e00 + 25$; logo, é da forma $100Q + 25 = 25(4Q + 1)$.

REFORMULAÇÃO DE OBJECTIVOS — Encontrar todos os números mágicos.

ACUMULAÇÃO DE EXPERIÊNCIAS — 1, 2, 5, 10, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, são todos números mágicos.

OBSERVAÇÃO — Todos os números mágicos que encontrámos parecem ser produtos de 2 e 5. Pelo menos os da lista acima.

CONJECTURA — Qualquer número N da forma $N = 2^p \cdot 5^q$, onde $p \geq 0$, $q \geq 0$, é um número mágico.

COMENTÁRIO — Parece razoável. Não temos nada a perder!

CONTRA-EXEMPLO — Façamos $p = 3$, $q = 1$. Então $N = 2^3 \cdot 5 = 40$. Um número que termina em 40 é sempre divisível por 40? Não! Exemplo: 140.

REFORMULAÇÃO — Então e ao contrário? Todos os números mágicos que encontramos são da forma $2^p \cdot 5^q$. Talvez todos os números mágicos sejam dessa forma.

OBJECÇÃO — Não é exactamente o mesmo que foi proposto há pouco?

REFUTAÇÃO — Não, o proposto há pouco foi o inverso: um número da forma $2^p \cdot 5^q$ é mágico. Vês a diferença?

TEOREMA — Se N é um número mágico, então $N = 2^p \cdot 5^q$.

DEMONSTRAÇÃO — Consideremos um número que termina em N (recordemos: aqui N representa um grupo de algarismos). Então, o número é composto pelos algarismos $abc \ldots eN$. Gostaríamos de separá-lo como anteriormente. Portanto, suponhamos que N tem $d(N)$ algarismos. Então o número $abc \ldots eN$ é igual a $abc \ldots e00 \ldots 0 + N$, onde há $d(N)$ zeros no fim. Assim, o número é da forma $Q \cdot 10^{d(N)} + N$. (Exprimentemos com $d(N) = 2$, 3, etc.) Todos os números que terminarem em N são desta forma. Pelo contrário, qualquer que seja Q, o número $Q \cdot 10^{d(N)} + N$ termina em N. Se N é mágico, então $Q \cdot 10^{d(N)} + N$ é divisível por N. Uma vez que N é divisível por N, também $Q \cdot 10^{d(N)}$ é divisível por N, qualquer que seja Q. Por exemplo, Q pode ser simplesmente o número 1. Deste modo, $Q \cdot 10^{d(N)}$ tem de ser divisível por $Q \cdot 10^{d(N)} + N$. Como $10^{d(N)} = 2^{d(N)} \cdot 5^{d(N)}$ é uma factorização prima, conclui-se que o próprio N pode ser factorizado num certo número de 2 e 5.

SITUAÇÃO PRESENTE — Sabemos agora que um número mágico tem a forma $N = 2^p \cdot 5^q$ para p, $q \geq 0$ inteiros. Gostávamos de inverter esta proposição. Teríamos então uma condição necessária e suficiente para os números mágicos.

REANÁLISE DOS RESULTADOS — Uma vez que sabemos que todos os números mágicos são da forma $N = 2^p \cdot 5^q$, o problema reduz-se a: quais são as condições a impor a p e q para transformar o N resultante num número mágico?

CONJECTURA — $p \leq q$?

CONTRA-EXEMPLO — $p = 0$, $q = 4$, $N = 2^0 \cdot 5^4 = 625$. Será 625 mágico? Não! 1625 não é divisível por 625.

CONJECTURA — $p = q$?

OBJECÇÃO — Nesse caso, $N = 2^p 5^q = 10^p$, ou seja, 1, 10, 100, ... *OK!* Mas existem outros números mágicos.

CONJECTURA — $p \geq q$?

CONTRA-EXEMPLO — $p = 3$, $q = 1$, $N = 2^3 \cdot 5^1 = 40$. Este número não é mágico.

OBSERVAÇÃO — Hum! Existe aqui algo muito subtil. Com isto desce o pano sobre o acto I. O processo continua para aqueles com interesse e força de vontade suficientes.

Acto II

(Neste acto, a abordagem heurística é muito abreviada nesta exposição.)

CONFERÊNCIA DE ESTRATÉGIA — Regressemos à demonstração da necessidade da forma $N = 2^p \cdot 5^q$. Descobrimos que, se N for mágico, $10^{d(N)}$ é divisível por N. Recordemos que $d(N)$ é o número de dígitos no grupo de dígitos N. Talvez isto também seja suficiente? Ah! Progressos?

TEOREMA — N é mágico se e só se $10^{d(N)}$ for divisível por N.

DEMONSTRAÇÃO — A condição necessária já foi demonstrada. Se um número termina em N, então, é da forma $Q \cdot 10^{d(N)} + N$. Mas N divide N e admite-se que também divide $10^{d(N)}$. Logo, com certeza, divide $Q \cdot 10^{d(N)} + N$.

OBJECÇÃO ESTÉTICA — Embora seja verdade que agora temos uma condição necessária e suficiente para a propriedade de os números serem mágicos, esta condição é sobre o próprio N, e não na sua forma factorizada $2^p \cdot 5^q$.

CONFERÊNCIA — Quando é que $10^{d(N)}$ é divisível por $N = 2^p \cdot 5^q$? Bem, $10^{d(N)} = 2^{d(N)} \cdot 5^{d(N)}$; por isso, uma condição necessária e suficiente é, obviamente, $p \leq d(N)$, $q \leq d(N)$. Mas isto é equivalente a máx.$(p, q) \leq d(N)$. Ainda temos de nos livrar do maldito $d(N)$. Não o queremos. Gostaríamos de uma condição no próprio N, ou possivelmente em p e q. Como poderemos converter máx.$(p, q) \leq d(N) = d(2^p \cdot 5^q)$ numa forma mais conveniente? Como sabemos, $p = q$ serve. Vejamos isto escrito sob a nova forma: $p =$ máx.$(p, p) \leq d(2^p \cdot 5^p) = d(10^p)$. Ora o número de algarismos em 10^p é $p + 1$. Ou seja, estamos a dizer $p \leq p + 1$, o que está correcto. O que aconteceria se, no caso geral, «igualássemos» as potências de 2 e as potências de 5? Vamos escrever $q = p + h$, onde $h > 0$. (Ah!)

OBJECÇÃO — Bem, e se $p > q$, de modo que $q = p + h$ seja impossível com $h > 0$?

REFUTAÇÃO — Trata-se esse caso mais tarde.

CONFERÊNCIA — $\text{máx.}(p, p + h) \leq d(2^p \cdot 5^{p+h}) = d(2^p \cdot 5^p \cdot 5^h) = d(10^p \cdot 5^h)$. Como $h > 0$, $\text{máx.}(p, p + h) = p + h$. Além disso, o número de algarismos em $10^p \cdot Q$, onde Q é um número qualquer $= p +$ número de algarismos de Q. Logo, $p + h \leq p + d(5^h)$, ou $h \leq d(5^h)$.

QUESTÃO — Quando é que $h > 0$ e $h \leq d(5^h)$?

TENTATIVAS — $h = 1 : 1 \leq d(5^1)$. *OK!* $h = 2 : 2 \leq d(5^2)$. *OK!* $h = 3 : 3 \leq d(5^3)$. *OK!* $h = 4 : 4 \leq d(5^4) = d(625) = 3$. Não serve! $h = 5 : 5 \leq d(5^5) = d(3125) = 4$. Não serve!

CONJECTURA — $h \leq d(5^h)$ se e só se $h = 1, 2, 3$.

DEMONSTRAÇÃO — Omitida.

REPETIÇÃO — E se $p > q$?

CONFERÊNCIA — Seja $p = q + h$, $h > 0$. $q + h = \text{máx.}(q + h, q) \leq d(2^{q+h} \cdot 5^q) = d(10^q \cdot 2^h) = q + d(2^h)$, ou $h \leq d(2^h)$. Quando é que $h \leq d(2^h)$?

TENTATIVAS — $h = 1 : 1 \leq d(2^1)$. *OK!* $h = 2 : 2 \leq d(2^2)$. Não serve!

CONJECTURA — $h \leq d(2^h)$ se e só se $h = 1$.

DEMONSTRAÇÃO — Omitida.

TEOREMA — N é mágico se e só se for igual a uma potência de dez vezes 1, 2, 5, 25 ou 125.

DEMONSTRAÇÃO — Omitida.

Antecipando-nos a desenvolvimentos futuros, poderá interessar enunciar este teorema de uma forma diferente.

TEOREMA — N é mágico se e só se $N = 2^p \cdot 5^q$, onde $0 \leq q - p + 1 \leq 4$.

DEMONSTRAÇÃO — Omitida.

O acto III poderia começar perguntando o que aconteceria se escrevêssemos os nossos números numa outra base, diferente de 10. Por exemplo, uma base prima, ou uma base igual a uma potência de um primo.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

M. Gardner, U. Grenander; I. Lakatos [1976].

Estética comparativa

Quais são os elementos da criatividade? Será uma profunda capacidade analítica devida a facilidades na visualização combinatória ou geo-

métrica — uma mente tão incansável como um enxame de abelhas num jardím, saltando de facto em facto, de percepção em percepção e fazendo relações, ajudada por uma memória prodigiosa — uma intuição mística de como o universo se exprime matematicamente — uma mente que opera logicamente como um computador, criando milhares de implicações até que emerge uma configuração apropriada?

Ou estará algum princípio extralógico a trabalhar, uma compreensão e um uso de princípios metafísicos como guia? Ou, como pensava Henri Poincaré, um profundo apego à estética matemática?

Não se pode dizer que exista uma ciência da estética matemática. Podemos, porém, ver um exemplo e discuti-lo em pormenor. Podemos perceber as razões do juízo de Poincaré.

Vou pegar num famoso teorema matemático, com uma grande componente estética, e vou apresentar duas demonstrações diferentes. O teorema é o famoso resultado de Pitágoras segundo o qual $\sqrt{2}$ não é uma fracção.

A primeira demonstração é a tradicional.

Demonstração I

Suponhamos que $\sqrt{2} = p/q$, onde p e q são inteiros. Esta equação é, na realidade, uma representação de $2 = p^2/q^2$. Supõe-se que p e q são primos entre si, isto é, não têm factores comuns. (Se tivessem, poderia efectuar-se a divisão por esse factor.) Agora $2 = p^2/q^2$ implica $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um número par. Assim, p é par (se fosse ímpar, p^2 seria também ímpar, uma vez que ímpar × ímpar = ímpar). Se p é par, tem a forma $p = 2r$ e, por isso, $(2r)^2 = 2q^2$, ou $4r^2 = 2q^2$, ou $q^2 = 2r^2$. Tal como há pouco, q^2 é par e q tem de ser par. Agora chegamos a uma contradição lógica, pois provámos que p e q são ambos pares, embora tivéssemos afirmado no princípio que não tinham factores comuns. Deste modo, a equação $\sqrt{2} = p/q$ tem de ser rejeitada se p, q, são inteiros.

A segunda demonstração não é tradicional e é apresentada um pouco mais informalmente.

Demonstração II

Suponhamos outra vez que $p^2 = 2q^2$. Qualquer inteiro pode ser decomposto nos seus factores primos; suponhamos que tal foi efectuado para p e q. Assim, em p^2 existe um certo número de primos, aos pares (pois $p^2 = p \cdot p$). E em q^2 existe um certo número de primos, também aos pares. Mas (ah!) em $2 \cdot q^2$ existe um 2 que não tem parceiro. Contradição.

O ovo de Páscoa de Vegreville Alberta. Ron Resch, artista e cientista de computadores, criou este ovo poliédrico monumental. O ovo tem 10,3 m de altura, 6 m de largura, pesa cerca de 2300 kg e tem 3512 faces visíveis. É feito de 524 peças em forma de estrela de alumínio anodizado com 0,15 cm e 2208 peças triangulares de alumínio com 0,3 cm

Cortesia do artista

Não tenho dúvidas de que nove em cada dez matemáticos profissionais diriam que a demonstração II tem um maior grau de beleza estética. Porquê? Por ser mais pequena? (Na realidade, saltámos alguns pormenores formais.) Porque, em comparação, a demonstração I, com a sua ênfase na inexorabilidade lógica, parece pesada e complexa? Penso que a resposta está no facto de a demonstração II revelar o cerne da questão, enquanto a demonstração I o esconde, começando com uma hipótese falsa e terminando numa contradição. A demonstração I parece ser o argumento de um espertinho; a demonstração II expõe a «verdadeira» razão. Neste sentido, a componente estética está relacionada com a visão mais pura.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

S. A. Papert [1978].

Aspectos não analíticos da matemática

A matemática consciente e inconsciente

Se aceitarmos a convicção comum de que o universo natural é governado por leis matemáticas, compreenderemos que o universo e tudo nele está permanentemente a matematizar — a fazer operações matemáticas. Se formos místicos, podemos pensar que em cada partícula, ou agregado, reside um demónio matemático cuja função é governá-la e dizer: «Atenção à lei do inverso do quadrado, atenção às equações diferenciais!» Tal demónio também residiria nos seres humanos, porque também eles estão constantemente a fazer operações matemáticas sem esforço ou pensamento consciente. Estão a matematizar quando atravessam uma rua com um trânsito infernal, resolvendo, assim, complicadíssimos problemas de extremos em mecânica probabilística. Estão a matematizar quando os seus corpos reagem, a todo o momento, a condições transientes e procuram um equilíbrio regulatório. Uma semente de flor está a matematizar quando produz pétalas com simetria hexagonal.

Chamemos a este matematizar inerente ao universo matemático «inconsciente». A matemática inconsciente continua independentemente do que pensamos; não pode ser evitada ou parada. É natural, é automática. Não necessita de um cérebro ou de aparelhos computacionais específicos. Não necessita de espaço ou força intelectual. Em certo sentido, a flor, ou o planeta, é o seu computador.

Em oposição à matemática inconsciente temos a matemática «consciente». Esta parece estar limitada aos seres humanos e, possivelmente, a alguns animais superiores. A matemática consciente é aquilo que normalmente consideramos matemática. É em grande parte adquirida através do treino. Parece que se desenrola no cérebro. Temos consciência se estamos ou não a pensar nela. Está muitas vezes ligada a uma linguagem simbólica e abstracta. É muitas vezes assistida por lápis e papel, instrumentos matemáticos ou livros de referência.

Contudo, a matemática consciente nem sempre se processa através de símbolos abstractos. Pode processar-se através de um «sentido dos números», ou de um «sentido espacial», ou de um «sentido cinestésico». Por exemplo, o problema «será que este objecto cabe nesta caixa?» pode ser respondido com grande confiança com base num mero relance. O que está por trás destes sentidos especiais não é, muitas vezes, claro. Se representam experiências passadas, soluções-tipo analógicas encontradas na altura ou juízos inspirados, mas em parte aleatórios, o que interessa é que, de facto, em muitos casos, estas conclusões podem ser alcançadas rápida e correctamente. Embora estejamos conscientes do problema, só em parte estamos conscientes do processo através do qual chegamos à solução. A reflexão posterior revela frequentemente uma mistura de operações independentes e sobrepostas. Não existe, portanto, nenhuma linha bem definida entre a matemática inconsciente e consciente.

Matemática analógica e analítica

É conveniente dividir a matemática consciente em duas categorias. A primeira, talvez mais primitiva, será denominada «analógica-experimental» ou analógica, para abreviar. A segunda categoria será chamada «analítica». A matemática analógica é às vezes simples, pode ser realizada rapidamente e pode não utilizar nenhuma, ou utilizar poucas, estrutura simbólica abstracta da matemática da «escola». Pode, até certo ponto, ser realizada por quase todas as pessoas que vivam num mundo de relações espaciais e de tecnologia corrente. Apesar de umas vezes ser simples e quase não necessitar de esforço, outras pode ser difícil, como, por exemplo, quando se tenta entender o arranjo e as relações entre as peças de uma máquina, ou quando se tenta ter uma ideia intuitiva de um sistema complexo. Os resultados podem ser expressos, não em palavras, mas em «compreensão», «intuição» ou «visualização».

Na matemática analítica, predomina o simbólico. É quase sempre difícil. É um processo lento. É fatigante. Necessita de um treino especial. Pode necessitar de verificação constante por toda a cultura matemática

para assegurar a veracidade. A matemática analítica é realizada por muito poucas pessoas. É elitista e tem espírito crítico próprio. Os praticantes da suas manifestações mais elevadas formam uma «talentocracia». A grande virtude da matemática analítica é que, embora possa ser impossível verificar as intuições de outra pessoa, é possível, apesar de frequentemente difícil, verificar as suas demonstrações.

Como as palavras *analógica* e *analítica* são muito comuns e utilizadas em muitos contextos científicos específicos, e como pretendemos que tenham um significado especial neste ensaio, vamos ilustrá-las com alguns exemplos. Começamos com um problema muito antigo que teve uma base religiosa.

Problema: quando ocorre o solstício de Verão, ou a Lua nova, ou algum outro acontecimento astronómico importante?

Solução analógica:

i) Espera-se que aconteça. Comunica-se o acontecimento aos interessados através de mensageiros a partir do ponto de detecção.
ii) Constrói-se algum tipo de aparelho físico para detectar acontecimentos astronómicos importantes. Acredita-se que numerosos «computadores» astronómicos foram utilizados desde tempos pré-históricos, tanto no Novo como no Velho Mundos, para detectar os solstícios e alinhamentos lunares ou estelares importantes, que são muitas vezes de grande relevância para a agricultura ou religião.

Solução analítica: formula-se uma teoria de periodicidades astronómicas e, a partir dela, constrói-se um calendário.

Problema: quanto líquido há neste copo?

Solução analógica: deita-se o líquido num recipiente graduado e mede-se o volume directamente.

Solução analítica: aplica-se a fórmula do volume de um sólido cónico. Medem-se as dimensões lineares relevantes e faz-se o cálculo.

Problema: qual o caminho que um autocarro deve percorrer entre o centro de Providence e o centro de Boston de modo a maximizar os lucros da companhia?

Solução analógica: pensa-se em meia dúzia de rotas plausíveis. Reúnem-se os dados de tempos e custos dos percursos dos autocarros e adopta-se a melhor solução.

Solução analítica: constrói-se um modelo de quilometragem, portagens e tráfego. Resolve-se o modelo analiticamente, se possível. Se não, utiliza-se um computador.

Solução analítica-existencial: demonstra-se que, com base em certos pressupostos gerais, o cálculo variacional garante que existe uma solução para o problema.

Problema: é dada uma função $f(x, y)$ definida num quadrado no plano $x - y$; formula-se uma estratégia computacional que dê um gráfico das curvas de nível da função $[f(x, y) = \text{constante}]$.

Solução analítica: começando em algum ponto (x_0, y_0), calcula-se $c = f(x_0, y_0)$. Através de interpolação inversa, encontram-se pontos próximos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... para os quais $f(x_i, y_i) = c$. Unem-se estes pontos. Itera-se.

Solução tipo analógica: coloca-se uma rede fina por cima do quadrado e pensa-se na figura final como que produzida através de um varrimento. Calcula-se a função nos pontos da rede e divide-se o intervalo obtido em, digamos, 20 valores: $\upsilon_1, ..., \upsilon_{20}$. Seleccionando um valor υ_i, desenha-se em cada quadradinho ou (*a*) nada ou (*b*) um segmento de recta, se os quatro valores dos cantos forem compatíveis com υ_i. Itera-se em *i*.

Comparando soluções analógicas e analíticas

Em alguns problemas pode ser possível encontrar tanto a solução analógica como a analítica. Também pode acontecer que exista apenas uma das soluções, ou que nenhuma exista. Nenhuma das soluções deve ser preferida *a priori* com base em critérios de precisão ou simplicidade. Se temos acesso às duas soluções, então, é muito desejável que as duas estejam de acordo. Este pode ser o ponto crucial de uma teoria física.

O ataque a um problema é muitas vezes uma mistura das duas abordagens. No mundo real, uma solução analítica, por melhor que seja, tem sempre de ser corrigida e adaptada quando se modela ou contrói um sistema real. Por isso, em engenharia, uma solução analítica é considerada um ponto de partida e, esperamos, uma boa primeira aproximação.

A solução analógica parece estar mais próxima da matemática inconsciente que ocorre no universo. Provavelmente, as soluções analógicas predominam no mundo da tecnologia — mas isto é pura conjectura.

A hierarquia dos valores intelectuais

Quando se trata do valor intelectual de cada uma destas soluções, a ordem é clara. Embora uma solução analógica possa ser inteligente, baseada em instrumentação subtil e sofisticada, não tem o peso de uma solução puramente intelectual.

O intelecto cuida dos seus. O que é conscientemente mais difícil é o mais digno de valor. O nível da solução intelectual é proporcional à aparente complexidade da sua codificação abstracta. Até certo ponto, é claro, pois o edifício do intelecto pode desmoronar-se quando confrontado com a realidade experimental. A educação científica é muitas vezes dirigida para um discurso ao mais alto nível intelectual possível, e não para a resolução de problemas específicos.

A hierarquia que descrevemos é a de um matemático profissional. Do ponto de vista de um engenheiro, uma solução analítica tem pouco interesse se não originar um aparelho que funcione, o que corresponde a uma solução analógica para o problema. Um aparelho bem concebido e muito desenvolvido pode apresentar a economia de meios e a elegância de pesamento que caracterizam a melhor ciência e matemática, mas tal elegância raramente é reconhecida por cientistas com pendor teórico. O engenho e arte necessários para construir um avião operacional ou um computador eficiente e fiável raramente são apreciados até tentarmos fazer algo semelhante por nós próprios.

Existem hierarquias semelhantes no mundo não científico

Esta tendência de acentuar o intelecto não está limitada à ciência. Aparece, por exemplo, no mundo da arte. No nível mais baixo, está o artista comercial. Um pouco mais acima, está o artista que pinta retratos por encomenda. No nível mais elevado, encontra-se o «artista por excelência», que supostamente responde aos apelos abstractos do intelecto e do espírito. A peça de arte é muitas vezes acompanhada por uma explicação cuja abstracção pode rivalizar com os resultados mais profundos da matemática.

A demonstração matemática e a sua hierarquia de valores

A abordagem da matemática na forma definição–teorema–demonstração tornou-se quase o único paradigma de exposição e ensino superior da matemática. É claro que não é assim que a matemática é criada, propagada ou mesmo compreendida. A análise lógica da matemática, que reduz uma

demonstração a um processo (em princípio) mecanizável, é uma hipótese possível, que nunca é completamente realizada. A matemática é uma actividade humana, sendo a sua descrição lógico-formal apenas uma ficção; a verdadeira matemática é encontrada na prática dos matemáticos.

Um fenómeno interessante relacionado com dificuldades na compreensão de demonstrações deve ser notado. Um teorema matemático será considerado «profundo» se a sua demonstração for difícil. Alguns dos factores que contribuem para essa profundidade são formulações ou argumentos não intuitivos, ideias novas, complexidade ou tamanho da demonstração medidos a partir de alguma origem que não seja, ela própria, profunda. O oposto de profundo é «trivial», mas esta palavra é frequentemente utilizada com sentido depreciativo. Porém, não é obrigatório que o que é trivial seja desinteressante, irrelevante ou desnecessário.

Apesar desta ordem hierárquica, o que é profundo é, em certo sentido, indesejável, pois existe um esforço constante para simplificar, para encontrar modos alternativos de encarar os assuntos, que trivializem o que é profundo. Todos nós nos sentimos melhor quando passamos da parte analítica para a parte analógica do espectro vivencial.

Estilo cognitivo

Uma afirmação óbvia acerca do pensamento humano é a de que as pessoas variam dramaticamente no que pode ser apelidado de «estilo cognitivo», isto é, o seu modo principal de pensar.

Este facto era bem conhecido dos psicólogos do século XIX. Galton, em 1880, pediu a um vasto grupo de pessoas para «descreverem a imagem mental da sua mesa de pequeno-almoço em determinada manhã». Galton descobriu que algumas pessoas tinham imagens vívidas e precisas, enquanto outras só conseguiam formar imagens difusas ou, em alguns casos, nenhum tipo de imagem. William James constatou que as pessoas variam muito em relação ao sentido que utilizam mais para pensar, sendo na maioria das pessoas a audição ou a visão. Contudo, existia um pequeno grupo que era extremamente influenciado pelo tacto, ou cinestesia (movimento), mesmo naquilo que habitualmente denominamos pensamento abstracto.

Tantos modos de pensar não deveriam causar qualquer problema. Na realidade, poderíamos encarar com apreço a diversidade de tipos de pensamento acerca do mundo demonstrados pela nossa espécie e valorizar cada um deles como uma maneira válida de abordar os problemas.

Infelizmente, a tolerância é uma virtude rara, e uma resposta comum aos diferentes modos de pensar é, primeiro, negar que eles sejam possíveis e, segundo, que tenham algum valor.

William James afirma: «Uma pessoa com uma imaginação visual forte acha difícil de compreender como é que as pessoas que não possuem essa faculdade conseguem sequer pensar.»

Inversamente, aqueles que pensam sobretudo com palavras são literalmente incapazes de imaginar pensamento não linguístico. W. V. O. Quine diz: «[...] memórias são recordações, não de sensações passadas, mas principalmente de conceptualizações e verbalizações passadas.» Max Muller escreveu: «Como sabemos que existe um céu e que é azul? Saberíamos o que era um céu se não tivéssemos nome para ele?» A seguir, argumenta que o pensamento sem linguagem é impossível. Abelardo disse que a «linguagem é gerada pelo intelecto e gera o intelecto». O *Chandogya Upanishad* afirma que «a essência do homem é a fala». O *Evangelho de S. João* começa: «No princípio era o verbo [...].»

Willard V. O. Quine
1908-

No entanto, muitos tiveram opiniões opostas. Aristóteles disse que muitas vezes pensamos e lembramo-nos através de imagens. O bispo Berkeley defendia que as palavras eram um impedimento para o pensamento. Muitos filósofos e teólogos acham que conceitos e palavras podem conduzir a «jogos de palavras» perigosamente enganados. O *Lankavatara Sutra* é típico: «Os discípulos têm de estar precavidos contra a sedução das palavras e frases, e os seus significados ilusórios, porque, através delas, os ignorantes e fracos de espírito ficam baralhados e indefesos como um elefante que se debate em lama funda. Palavras e frases [...] não podem exprimir a mais elevada realidade [...]. Os ignorantes e fracos de espírito declaram que o significado não é distinto das palavras, que tal como são as palavras, também é o significado [...]. A verdade está para além das letras, palavras e livros.» O *Tao Te Ching* (LXXXI) diz: «As palavras verdadeiras não são sonantes; as palavras sonantes não são verdadeiras. O homem bom não demonstra através de argumentos e aquele que demonstra por argumentos não é bom [...].» Nesta linha de ideias há uma citação da Bíblia que diz: «A letra mata, mas o espírito dá a vida [...].»

O estilo cognitivo na matemática

No seu livro, Hadamard tentou descobrir como é que matemáticos e cientistas famosos pensavam ao longo do processo de trabalho. Dos que contactou numa pesquisa informal, escreveu (pp. 84 e 85): «Praticamente

Albert Einstein
1879-1955

todos [...] evitam não só o uso de palavras mentais, como também [...] a utilização mental de sinais precisos ou algébricos [...] utilizam imagens vagas [...] as imagens mentais dos matemáticos de quem recebi respostas são frequentemente visuais, mas podem também ser de outros géneros — por exemplo, cinéticas.»

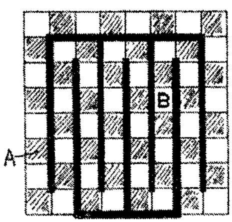
Albert Einstein, em carta a Hadamard, escreveu (p. 142): «As palavras, ou a linguagem, tal como são escritas ou faladas, não parecem desempenhar qualquer papel no meu mecanismo de pensamento [...]. As entidades físicas que parecem servir de elementos do pensamento são certos sinais e imagens mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados 'voluntariamente' [...]. Os elementos acima mencionados são, no meu caso, de tipo visual e, por vezes, muscular. As palavras convencionais, ou outros sinais, têm de ser procuradas com grande esforço só numa segunda fase [...].» Vários estudos recentes sobre o modo como os adultos, em geral, realizam cálculos aritméticos simples indicam que o mesmo é verdadeiro para não matemáticos.

Um exemplo do estilo cognitivo em geometria combinatória

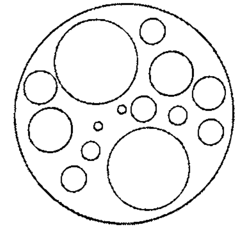
Já descrevemos e comparámos soluções analógicas e analíticas. Embora a descoberta matemática possa ter grandes componentes de uma ou de outra, estamos em presença de estilos cognitivos diferentes.

Aqui está um exemplo surpreendente onde uma prova analítica poderia ser muito difícil, enquanto uma demonstração analógica torna tudo transparente.

Teorema de Gomory: tira-se um quadrado branco e um preto de um tabuleiro de damas normal. O tabuleiro assim obtido pode ser sempre coberto com 31 dominós de tamanho 2×1.



Prova analógica: converte-se o tabuleiro de damas num labirinto, como na figura junta. Independentemente do quadrado preto *A* e do quadrado branco *B* que se retire, o tabuleiro pode ser coberto percorrendo o labirinto com uma cadeia de dominós interrompida em *A* e *B* (v. Honsburger, p. 66).



A imagem de uma cadeia de dominós a percorrer o tabuleiro é suficiente para compreendermos a solução num relance. Note-se o poderoso pendor cinestésico da demonstração. Seria difícil para o leitor normal (isto é, visual) ver a demonstração e não sentir o movimento.

Não conhecemos uma solução analítica para o problema. É claro que poderíamos restringir a solução dada acima contando os quadrados pretos e brancos para encontrar uma demonstração mais formal.

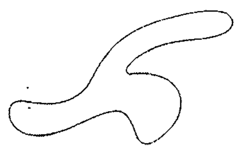
Aqui está um problema geométrico para o qual existem os dois tipos de soluções.

Teorema: é impossível preencher um círculo C *com um número finito de círculos mais pequenos (contidos em* C*) que não se sobreponham.*

Solução analógica: isto é visualmente óbvio.

Solução analítica: para uma demonstração perfeita baseada em noções de independência linear, v. Davis, 1965. A solução analógica é tão evidente que exigir mais é pedantismo matemático.

Isto leva-nos a um teorema famoso.



Teorema da curva de Jordan: uma curva simples fechada no plano divide esse plano em duas regiões, uma limitada e outra ilimitada.

Solução analógica: isto é visualmente óbvio.

Solução analítica: muito difícil, devido ao facto de o problema conter um grau excessivo de generalidade analítica.

Imagens matemáticas

Hadamard descreveu a corrente do pensamento semiconsciente que pode acompanhar o processo consciente da matemática. Este tipo de pensamento existe com certeza, apesar de ser muito difícil de descrever e de documentar.

Mais algumas palavras nessa direcção descrevendo as minhas próprias experiências poderão, assim, ser apropriadas.

A corrente do pensamento semiconsciente — que pode ser referida como imagens matemáticas — não parece estar directamente relacionada com o trabalho analítico em desenvolvimento. É como se fosse mais

analógica, quase visual, por vezes até musical. Acompanha e, ocasionalmente, ajuda a corrente dominante de pensamento. Frequentemente, parece irrelevante, uma mera presença suspensa em fundo.

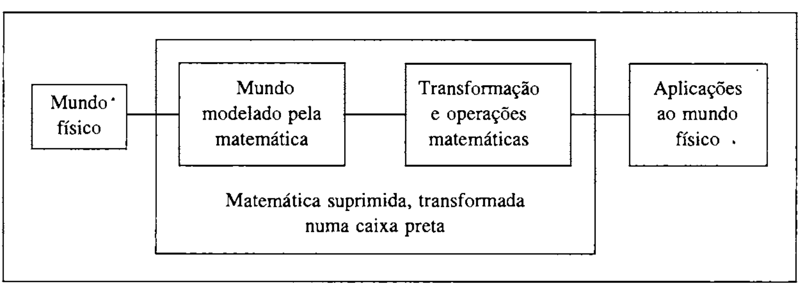
Há alguns anos, passei um tempo considerável a trabalhar na teoria de funções de variável complexa. Esta teoria tem uma base geométrica importante. De facto, a teoria pode ser desenvolvida separadamente de um ponto de vista geométrico (à Riemann) ou analítico (à Weierstrass). As ilustrações geométricas em livros de estudo representam muitas vezes esferas, mapas, superfícies estranhas, configurações com círculos, cadeias sobrepostas de círculos, etc. À medida que trabalhava com o material analítico, descobri que o estudo era acompanhado por recordações ou por resíduos sobrepostos de dezenas de imagens desse tipo, que tinha visto em vários livros, juntamente com pensamentos não matemáticos e temas musicais rudimentares mas repetitivos.

Acabei por completar um corpo de material que escrevi de forma abreviada. Apareceu então algo na minha agenda que me impediu de continuar esse estudo por vários anos. Mal voltei a olhar para o material nesse intervalo. No fim desse período, voltei a ter tempo e decidi retomar esse estudo e ver se podia transformá-lo num livro.

No princípio estava muito esquecido. Só após várias semanas de trabalho e revisão consegui estar de novo à vontade. Depois, descobri, para minha surpresa, que as imagens matemáticas e a melodia originais retornavam e fui capaz de levar a tarefa a bom termo.

O objectivo correcto das aplicações matemáticas é tornar a matemática automatizada

A matemática analítica é difícil, pelo que será feita incorrectamente se for apressada. Não esperamos que um astronauta que pouse na Lua programe as suas acções como resultado de cálculos em tempo real com uma tabela de logaritmos e funções trigonométricas. Idealmente, tal



como em voos não tripulados, todo o sistema será automatizado. Embora haja uma considerável base matemática em manobras de aterragem, esperamos que o astronauta responda a leituras de instrumentos ou computadores ou a instruções verbais, que são substitutos para essas leituras. A matemática analítica tem de ser suprimida ou ultrapassada e substituída pela matemática analógica.

Constata-se isso vezes sem conta na matemática aplicada. Quanto mais completa e bem sucedida é uma aplicação, mais automatizada, programada e repetitiva deve ser.

Um exemplo de computação gráfica

Um exemplo impressionante da supressão da base matemática ocorreu nos últimos dez ou quinze anos na área da arte e animação por computador.

A arte por computador teve origem em instrumentos mecânicos que produziam movimentos cíclicos de vários tipos, hipociclóides, figuras de Lissajous, figuras «espirográficas», etc. Estas eram facilmente produzidas em osciladores ou circuitos analógicos. A ideia era desenhar figuras visualmente agradáveis ou excitantes. Existia uma identificação constante da figura com a equação matemática.

Ao longo da primeira década da arte por computador, a presença da matemática era muito notória. Além de terem sensibilidade artística, os praticantes tinham de saber programar computadores, programação gráfica, uma certa matemática básica, tal como geometria analítica, transformações elementares e esquemas de interpolação. Gradualmente, foram escritas linguagens de cada vez mais alto nível para a arte por computador. O modo de operação tornou-se menos analítico, mais linguístico e mais analógico. À medida que isto foi acontecendo, a subestrutura matemática foi sendo incorporada à partida, ou suprimida, ou ultrapassada.

Um excelente exemplo desta supressão é o programa *Paint*, desenvolvido pela Universidade do Utah e pelo Instituto de Tecnologia de Nova Iorque. Como resposta a um desejo de realizar animação comercial por computador, foi desenvolvida uma linguagem de muito alto nível que podia facilmente ser aprendida e utilizada pelos animadores comerciais sem conhecimentos de matemática. Trabalhando a cores, o artista pode escolher uma paleta e criar pincéis de várias larguras e traçados característicos. Cria formas trabalhando com uma caneta electrónica num bloco electrónico. Vários «itens no *menu*» permitem preencher as formas com cores, mudá-las continuamente em tempo real, replicar, transformar *(zoom)*, duplicar e animar através de interpolação linear ou não linear.

Assim, o artista comunica ao computador os seus movimentos do pulso, braço e ombro, bem como um conjunto de «opções de *menu*». Como estas opções também são controladas pela caneta electrónica, todo o processo se passa numa imitação do modo de pintar convencional.

A degradação da consciência geométrica

Tem sido muitas vezes notado, durante o último século e meio, que existe uma degradação progressiva e contínua dos elementos geométricos e cinestésicos da instrução e investigação matemáticas. Durante este período os elementos formais, simbólicos, verbais e analíticos têm prosperado muito.

Quais são as razões deste declínio? Existem algumas explicações:

1) O tremendo impacto de *La Géometrie* de Descartes, no qual a geometria foi reduzida à álgebra.
2) O impacto nos finais do século XIX do programa de Felix Klein para unificar as geometrias através da teoria de grupos.
3) O colapso, no princípio do século XIX, da visão, devida em grande parte à experiência limitada dos sentidos, de que a geometria de Euclides é a verdade *a priori* para o universo, de que ela é *o* modelo para o espaço físico.
4) A incompletude da estrutura lógica da geometria euclidiana clássica, descoberta no século XIX e posteriormente corrigida por Hilbert e outros.
5) As limitações de duas ou três dimensões físicas, que formam o pano de fundo natural da geometria visual.
6) A descoberta de geometrias não euclidianas. Isto está relacionado com limitações do terreno visual sobre o qual a geometria visual é construída, em oposição à grande generalidade que é possível quando a geometria é algébrica e abstracta (geometrias não euclidianas, geometrias complexas, geometrias finitas, álgebra linear, espaços métricos, etc.).
7) As limitações do olho na sua percepção de «verdades» matemáticas (funções contínuas não diferenciáveis, ilusões ópticas, casos particulares sugestivos mas enganadores).

Uma excelente exposição da natureza contra-intuitiva da matemática analítica na sua tentativa de prolongar o campo visual pode ser encontrada no artigo de Hahn no vol. III do *The World of Mathematics*. Tornou-

-se tradicional considerar estes «exemplos patológicos» indicadores das falhas da intuição visual. *Mas eles também podem muito bem ser interpretados como exemplos da inadequação da modelação analítica do processo visual.*

Hemisfério direito e hemisfério esquerdo

Existe uma semelhança intrigante, mas especulativa, entre as duas abordagens da matemática que descrevemos e pesquisas recentes sobre as funções dos dois hemisférios cerebrais. Apesar de essa pesquisa ainda se encontrar no início, parece claro que os hemisférios esquerdo e direito estão especializados em tarefas diferentes. (Para uma revisão e compilação deste campo em rápido crescimento, v. a primeira parte da obra de Schmitt e Worden; para uma discussão informal, v. Gardner, *The Shattered Mind.*)

Sabe-se há mais de cem anos que, em praticamente todos os dextros e em cerca de metade dos canhotos, a zona do cérebro associada à fala se encontra localizada principalmente no hemisfério esquerdo. Isto parece ser uma especialização biológica inata, e demonstrou-se existir uma pequena assimetria anatómica entre os dois hemisférios tanto em bébés como em adultos. Lesões em certas áreas do hemisfério esquerdo causam algumas dificuldades características da fala, ao passo que lesões em áreas correspondentes no hemisfério direito não as causam. Simplificando muito um assunto complexo: o hemisfério esquerdo é responsável, na maior parte dos seres humanos, pela linguagem e pelas capacidades cognitivas que podemos caracterizar grosseiramente como analíticas ou lógicas. Recentemente, tornou-se evidente que o hemisfério direito é muito superior ao esquerdo na maioria das faculdades visuais e espaciais, na discriminação pelo tacto e nos aspectos não verbais da audição, como, por exemplo, a música.

Uma grande parte da informação acerca da especialização de cada hemisfério provém do estudo pormenorizado de um pequeno número de pacientes submetidos a intervenções neurocirúrgicas a quem foi interrompida a ligação entre os dois hemisférios como última medida contra epilepsias muito graves. Sperry fez um resumo dos muitos resultados desses estudos (p. 11):

> Exames repetidos ao longo dos últimos dez anos confirmam uma grande lateralização e predomínio da fala, escrita e cálculo no hemisfério esquerdo (sem comunicação com o direito) nestes doentes dextros [...]. Embora quase sempre mudo [...]. o hemisfério menor é claramente a zona cerebral mais

> importante para algumas tarefas [...]. Em grande parte, elas envolvem a apreensão e o processamento de padrões espaciais, relações e transformações. Elas parecem holísticas e unitárias, em vez de analíticas e fragmentárias [...] e parecem envolver visão perceptual concreta, e não raciocínio abstracto, simbólico ou sequencial.

Devemos lembrar-nos sempre de que os dois hemisférios cooperam para formarem um cérebro completo. Mesmo na fala, função que é do hemisfério esquerdo, o hemisfério direito desempenha um papel importante, e os hemisférios trabalham em harmonia num indivíduo normal.

Os aspectos melódicos da fala — ritmo, intensidade e entoação — parecem estar relacionados com o hemisfério direito. Gardner dá-nos uma descrição de outras funções (p. 434):

> Em indivíduos cujo hemisfério direito está afectado, as capacidades de se exprimirem em linguagem e de compreenderem [...] os outros são enganadoramente normais [...] [no entanto] estes pacientes estão estranhamente isolados de todas as mensagens, não verbais, dos outros [...]. Eles assemelham-se a máquinas de linguagem [...] que não compreendem nem as *nuances* subtis nem os contextos não linguísticos subjacentes à mensagem [...].

Gardner continua, de um modo pouco lisonjeiro para a imagem pública dos matemáticos (p. 435):

> Nestes casos, o doente (com lesões no hemisfério direito) exemplifica o comportamento [...] associado ao jovem e brilhante matemático ou cientista de computadores. Este indivíduo altamente racional está sempre atento a inconsistências naquilo que se está a dizer, procurando sempre formular ideias do modo mais estanque e fechado possível; mas em nenhum dos casos dá mostras de qualquer sentido de humor acerca da própria situação, nem [...] das muitas facetas interpessoais subtis que formam uma parte tão central do relacionamento humano. Sentimo-nos como se as respostas estivessem a ser impressas a alta velocidade em computador.

As histórias que atrás contámos, e a nossa própria experiência, indicam que a matemática utiliza os talentos dos dois hemisférios, em vez de se restringir às especialidades linguística e analítica do hemisfério esquerdo. Os aspectos não verbais, espaciais e holísticos do pensamento são importantes naquilo que a maior parte dos bons matemáticos faz na realidade, embora não o sejam tanto naquilo que diz que faz.

É razoável pensar que uma cultura matemática que despreza explicitamente os aspectos espaciais, visuais, cinestésicos e não verbais do pensamento não utiliza totalmente as capacidades do cérebro.

Não dar importância aos elementos analógicos da matemática representa o fecho de um canal da consciência e de experiência matemáticas. Seria decerto melhor desenvolver e usar todos os talentos e capacidades especiais dos nossos cérebros, em vez de suprimir alguns pela educação e preconceitos profissionais. Sugerimos que na matemática seria melhor que as duas metades do cérebro cooperassem, se completassem e se desenvolvessem uma à outra, em vez de interferirem e estarem em conflito.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

T. Banchoff e C. Strauss; P. J. Davis [1974]; P. J. Davis e J. Anderson; H. Gardner; I. Goldstein e S. Papert; J. Hadamard; R. Honsberger; W. James [1962]; M. Kline [1970]; K. Knowlton; Wikuyk; E. Michener; R. S. Moyer e T. K. Landauer [1967], [1973]; S. Papert [1971]; M. Polányi [1960]; R. D. Resch; F. Restle; F. O. Schmitt e F. G. Worden; R. W. Sperry; C. M. Strauss; R. Thom [1971].

7

Da certeza à falibilidade

Platonismo, formalismo, construtivismo

Se se fizer matemática todos os dias, ela parecerá a coisa mais natural do mundo. Se se parar para pensar sobre o que se está a fazer e qual o seu significado, ela parecerá uma das coisas mais misteriosas. Como é que conseguimos falar de coisas que nunca ninguém viu e percebê-las melhor do que os objectos reais do dia-a- dia? Por que razão a geometria euclidiana ainda é correcta, quando a física aristotélica já morreu há muito? O que sabemos em matemática e como o sabemos?

Em qualquer discussão sobre os fundamentos da matemática são apresentados três dogmas-padrão: platonismo, formalismo e construtivismo.

De acordo com o platonismo, os objectos matemáticos são reais. A sua existência é um facto objectivo, independente do nosso conhecimento sobre esses objectos. Conjuntos infinitos, conjuntos infinitos não contáveis, variedades de dimensão infinita, curvas que preenchem o espaço — todos os membros do jardim zoológico matemático são objectos definidos, com propriedades definidas, algumas conhecidas, muitas desconhecidas. Estes objectos não são físicos ou materiais. Eles existem fora do espaço e do tempo da existência física. São imutáveis — não foram criados e não se alterarão ou desaparecerão. Qualquer pergunta com significado acerca de um objecto matemático tem uma resposta

definida, quer consigamos determiná-la, quer não. De acordo com o platonismo, um matemático é um cientista empírico, como um geólogo: não pode inventar nada, porque já existe tudo. Ele só pode descobrir.

Dois platonistas de alma e coração são René Thom e Kurt Gödel. Thom escreve (1971):

> Considerando todas as coisas, os matemáticos deveriam ter a coragem de assumir as suas convicções mais profundas e, portanto, afirmar que as formas matemáticas têm mesmo uma existência, que é independente da mente que as estuda [...]. No entanto, num dado momento, os matemáticos só têm uma visão incompleta e fragmentária deste mundo das ideias.

E eis Gödel:

> Apesar de se encontrarem muito afastados da experiência dos sentidos, temos algo semelhante a uma percepção dos objectos da teoria de conjuntos, como é demonstrado pelo facto de os axiomas se nos imporem como sendo verdadeiros. Não encontro nenhuma razão para termos menos confiança neste tipo de percepção [...]. Eles podem também representar um aspecto da realidade objectiva.

O mundo das ideias de Thom é geométrico, ao passo que o de Gödel é o universo da teoria de conjuntos. Por outro lado, existe Abraham Robinson (1969):

> Não consigo imaginar o meu regresso ao credo do verdadeiro platonista, que vê o mundo do infinito estender-se à sua frente e crê que consegue compreender o incompreensível.

De acordo com o formalismo, não há *nenhum* objecto matemático. A matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas — por outras palavras, em fórmulas. Numa visão extrema: existem regras através das quais se obtêm fórmulas a partir de outras, mas as fórmulas não são *acerca* de nada, são apenas cadeias de símbolos. É claro que o formalista também sabe que as fórmulas matemáticas são, por vezes, aplicadas a problemas físicos. Quando se dá uma interpretação física a uma fórmula, esta adquire um significado e pode ser verdadeira ou falsa. Mas esta veracidade ou falsidade está relacionada com a interpretação física específica que se fez. Enquanto fórmula matemática pura, não tem qualquer significado nem qualquer valor de veracidade.

Pode ser dado um exemplo, que demonstra a diferença entre o formalista e o platonista, através da hipótese do contínuo de Cantor. Cantor conjecturou que não existe nenhum cardinal infinito superior a $\aleph_0$

(a cardinalidade dos inteiros) e inferior a *C* (a cardinalidade dos números reais). K. Gödel e P. J. Cohen mostraram que, com base nos axiomas da teoria formal de conjuntos, a hipótese do contínuo não pode ser nem demonstrada (Gödel, 1937) nem negada (Cohen, 1964) (v. capítulo 5, teoria de conjuntos não cantoriana). Para o platonista isto significa que os nossos axiomas são uma descrição incompleta do conjunto dos números reais. Os axiomas não são suficientemente fortes para nos contarem a verdade toda. A hipótese do contínuo ou é verdadeira ou falsa, mas não compreendemos suficientemente bem o conjunto dos números reais para encontrarmos a resposta.

Para o formalista, pelo contrário, a interpretação platonista não tem sentido, porque não *existe* nenhum sistema de números reais, excepto como o criamos, utilizando axiomas para o descrevermos. É evidente que podemos mudar este sistema de axiomas, se o desejarmos. Tal mudança pode ser por conveniência, utilidade ou outro critério que queiramos introduzir; não pode ser uma questão de melhor correspondência com a realidade, pois não existe realidade.

Formalistas e platonistas estão em lados opostos na questão da existência e da realidade, mas não divergem sobre os princípios de raciocínio que devem ser permissíveis na prática matemática. Opostos a ambos estão os construtivistas. Os construtivistas consideram matemática genuína apenas o que pode ser obtido por uma construção finita. O conjunto dos números reais, ou qualquer outro conjunto infinito, não pode ser obtido daquela maneira. Consequentemente, o construtivista encara a hipótese de Cantor como uma conversa sem sentido. Qualquer resposta seria pura perda de tempo.

A condição filosófica do matemático

A maior parte dos autores que escrevem sobre este assunto parece concordar que um investigador matemático típico é um platonista durante a semana e um formalista aos domingos. Quer dizer, quando está a trabalhar em matemática, está convencido de que estuda uma realidade objectiva cujas propriedades tenta determinar. Mas, quando se lhe pede para fundamentar filosoficamente esta realidade, acha mais fácil fingir que, afinal, não acredita nela.

Citamos dois autores muito conhecidos:

> Em princípio, acreditamos na realidade da matemática, mas é claro que, quando os filósofos nos atacam com os seus paradoxos, corremos a escon-

der-nos atrás do formalismo, dizendo que «a matemática é apenas uma combinação de símbolos sem sentido», e depois recordamos os capítulos 1 e 2 da teoria de conjuntos. Finalmente, deixam-nos em paz e podemos voltar à nossa matemática e fazê-la como sempre a fizemos, com o sentimento de trabalharmos com algo real. Este sentimento é, provavelmente, uma ilusão, mas é muito conveniente. Esta é a atitude de Bourbaki em relação aos fundamentos. [J. A. Dieudonné, 1970, p. 145.]

Para um matemático médio que apenas quer garantir que o seu trabalho tem bases precisas, a melhor escolha é evitar as dificuldades através do programa de Hilbert. Nesse programa, consideramos a matemática um jogo formal e só nos preocupamos com a questão da coerência interna [...]. O realismo [isto é, platonismo] é a posição que, provavelmente, a maioria dos matemáticos preferiria. Só quando se apercebe de algumas das dificuldades da teoria de conjuntos é que o matemático começa a questionar essa posição. Se essas dificuldades o perturbarem particularmente, correrá para o abrigo do formalismo, embora a sua posição normal seja algures entre as duas, tentando desfrutar do melhor dos dois mundos. [P. J. Cohen, *Axiomatic Set Theory,* ed. D. Scott.]

Nestas citações de Dieudonné e Cohen, usamos o termo *formalismo* para designarmos a posição filosófica de que muita ou toda a matemática pura é um jogo sem sentido. É óbvio que rejeitar o formalismo como filosofia da matemática não implica, de modo algum, uma crítica à lógica matemática. Pelo contrário, os lógicos, cuja actividade matemática *é* o estudo de sistemas formais, detêm a melhor posição para verificar a enorme diferença entre a matemática como ela é feita e a matemática como é esquematizada na noção de um sistema matemático formal.

Segundo Monk, o mundo matemático é povoado por 65% de platonistas, 30% de formalistas e 5% de construtivistas. A nossa impressão é a de que a visão de Cohen-Dieudonné está mais perto da verdade. O matemático típico é tanto um platonista como um formalista — um platonista secreto que põe uma máscara de formalista quando é caso disso. Os construtivistas são uma espécie rara, cujo estatuto no mundo matemático por vezes se assemelha ao de heréticos tolerados e rodeados por membros ortodoxos de uma religião.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. Dieudonné [1970]; M. Dummett; K. Gödel; L. Henkin; J. D. Monk; A. Robinson; R. Thom; D. Scott.

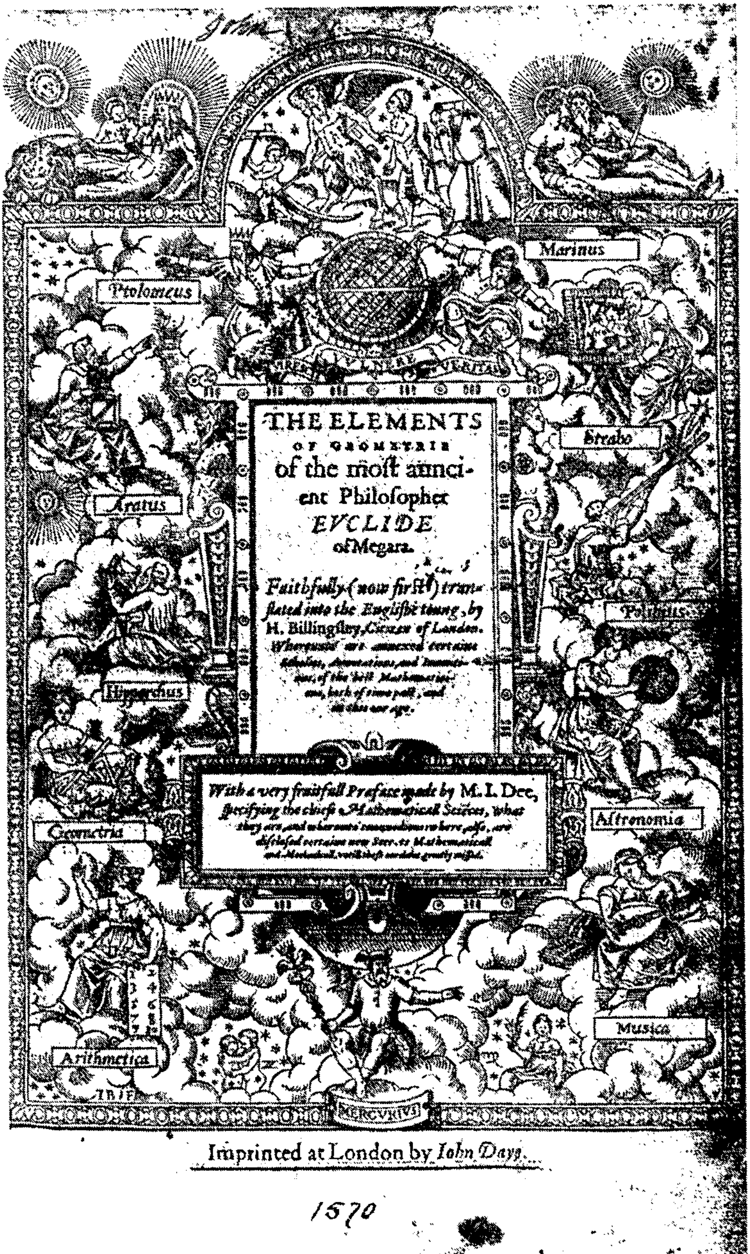
O mito de Euclides

A ideia dada pelos livros sobre a filosofia da matemática é estranhamente fragmentária. O leitor fica com a impressão de que este assunto apareceu pela primeira vez no fim do século XIX, em resposta a contradições da teoria de conjuntos de Cantor. Nessa altura, falou-se numa «crise de fundamentos». Para estudar os fundamentos apareceram três escolas, que passaram trinta ou quarenta anos em guerrilhas entre si. No fim, verificou-se que nenhuma delas podia fazer muito por esses fundamentos, e a história termina a meio, há cerca de quarenta anos, quando Whitehead e Russell abandonaram o logicismo, o formalismo de Hilbert foi derrotado pelo teorema de Gödel e Brouwer foi abandonado a pregar o construtivismo em Amesterdão, desprezado pelo resto do mundo matemático.

Este episódio da história da matemática é, na verdade, impressionante. É claro que foi um período crítico para a filosofia da matemática. Mas, devido a uma mudança de significado das palavras, o facto de o estudo dos fundamentos ter sido, em certo período, a corrente dominante na filosofia matemática levou a uma identificação virtual entre a filosofia da matemática e o estudo dos fundamentos. Uma vez feita esta identificação, ficamos com uma impressão peculiar: a filosofia da matemática foi um campo activo por apenas quarenta anos. Foi despertado pelas contradições da teoria de conjuntos e, decorrido algum tempo, voltou a adormecer.

Na realidade, houve sempre um pano de fundo filosófico, mais ou menos explícito, para o pensamento matemático. O período do estudo dos fundamentos foi uma altura em que matemáticos importantes estiveram abertamente preocupados com questões filosóficas e se dedicaram a controvérsias públicas sobre essas questões. Para se compreender o que se passa nesse período temos de olhar para a história anterior e posterior.

Existem duas linhas da história que têm de ser seguidas. Uma está na filosofia da matemática; a outra encontra-se na própria matemática. A crise foi a manifestação de uma discrepância de longa data entre o ideal tradicional da matemática, a que podemos chamar o mito de Euclides, e a realidade da matemática, a prática real da actividade matemática num determinado período. O bispo Berkeley reconheceu esta discrepância, em 1734, no seu livro *The Analyst.* O livro tinha um subtítulo comprido: *A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, Wherein it is Examined Whether the Object, Principles and Inferences of the Modern Analysis are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith. «First cast out the beam of*


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most auncient Philosopher
EVCLIDE
of Megara.
Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inventions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.
With a very fruitfull Praeface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Sciences, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, untill these our daies, greatly missed.
Imprinted at London by Iohn Daye.
1570

Primeira página da 1.ª edição em inglês da obra de Euclides

*thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast the mote out of thy brother's Eye**.» (O infiel era Edmund Halley.)

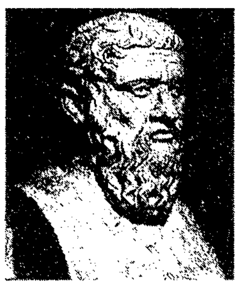
Berkeley expôs os pontos obscuros e as incoerências do cálculo diferencial tal como este era explicado no seu tempo por Newton, Leibnitz e seus seguidores. Isto é, mostrou como o cálculo estava distante da ideia de matemática segundo o mito de Euclides.

O que é o mito de Euclides? É a convicção de que os livros de Euclides contêm verdades acerca do universo que são claras e indubitáveis. Começando por verdades evidentes e prosseguindo através de demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento que é certo, objectivo e eterno. Até hoje parece que a maioria das pessoas cultas acredita no mito de Euclides. Até meados ou fins do século XIX, o mito não tinha discussão. Toda a gente acreditava nele. Fora o principal apoio da filosofia metafísica, isto é, da filosofia que procura estabelecer alguma certeza *a priori* acerca da natureza do universo.

Aristóteles
384-322 a. C.

As raízes da filosofia matemática, tal como da própria matemática, estão na Grécia clássica. Para os Gregos, a matemática significava geometria e a filosofia da matemática, para Platão e Aristóteles, era a filosofia da geometria.

Para Platão, a missão da filosofia era descobrir o conhecimento escondido atrás do véu da opinião, das aparências, da mudança e da ilusão do mundo temporal. Nesta tarefa, a matemática ocupava um lugar central, pois o conhecimento matemático era o exemplo perfeito do conhecimento independente dos sentidos, conhecimento de verdades necessárias e eternas.

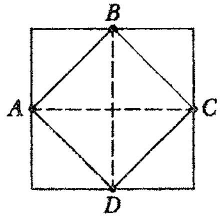


Platão
c. 427 a. C.

No livro *Meno,* de Platão, Sócrates questiona um jovem escravo e leva-o a descobrir que a área do quadrado grande (v. figura) é o dobro da área de *ABCD,* cuja diagonal tem o comprimento do lado do quadrado grande. Como é que o jovem escravo sabe isto? Sócrates afirma que o rapaz não o aprendeu nesta vida mortal; por isso, o seu

---

* Um discurso dirigido a um matemático infiel, onde se examina se os objectivos, princípios e inferências da análise moderna são concebidos mais distintamente, ou deduzidos mais claramente, do que os mistérios religiosos e as matérias da fé. «Primeiro evita a luz que ofusca o teu olho; e então verás melhor para retirar a partícula de pó do olho do teu irmão» (*mote* tem duplo sentido em inglês: pó e erro mais insignificantes do que os nossos próprios erros). *(N. do T.)*



O quadrado sobre a diagonal AC *tem o dobro do tamanho do quadrado sobre o lado* AB. *Platão usou este exemplo para mostrar que possuímos conhecimento certo e intemporal*

conhecimento deve ser uma recordação da vida antes do nascimento. Para Platão, este exemplo mostra que existe conhecimento verdadeiro, conhecimento do eterno. Platão argumenta que:

1. Conhecemos verdades da geometria que não aprendemos nem através da educação nem da experiência.
2. Este conhecimento é um exemplo das verdades imutáveis e universais que, realmente, aprendemos e reconhecemos.
3. Assim, deve existir um reino da verdade absoluta e eterna, a fonte e a base do nosso conhecimento do bem.

A concepção que Platão tinha da geometria foi um elemento-chave na sua concepção do mundo. A geometria desempenhou um papel semelhante para os filósofos racionalistas: Espinoza, Descartes e Leibnitz. Tal como Platão, os racionalistas encaram a faculdade da razão como uma característica inata da mente humana, com a qual as verdades podem ser apreendidas *a priori,* independentemente da observação. Por exemplo, posso estar enganado ao pensar que estou sentado à secretária a escrever esta frase, assim como posso estar claramente errado ao pensar que o Sol nascerá amanhã, mas de modo algum posso estar enganado no meu conhecimento de que a soma interna dos ângulos de um triângulo é igual a 180°. (O exemplo favorito de Espinoza de uma afirmação indubitavelmente verdadeira era este teorema de Euclides, que, a propósito, se demonstra ser falso na geometria não euclidiana).

A razão era a característica que permitia ao homem conhecer o bem e conhecer o divino. A existência desta característica tinha a sua melhor prova na matemática. A matemática partia de verdades evidentes e prosseguia através de raciocínios cuidadosos para descobrir verdades escondidas. As verdades da geometria tratavam das formas ideais, cuja existência era evidente para a mente. Questionar a sua existência teria sido um sinal de ignorância ou insanidade.

A matemática e a religião eram os melhores exemplos de conhecimento obtido pela razão. O conhecimento do bem em Platão foi transformado no conhecimento de Deus, no pensamento dos racionalistas do Renascimento.

O serviço que o racionalismo prestou à ciência foi ter negado a supremacia da autoridade, em particular da autoridade religiosa, afirmando, no entanto, a veracidade da religião. Esta filosofia deu espaço à ciência para crescer sem ser estrangulada por rebeldia. Esta corrente de pensamento reclamou para a razão — em particular para a ciência — o direito à independência em relação à autoridade — em particular, à autoridade da Igreja. Porém, esta independência da razão não era muito perigosa para a autoridade, uma vez que os filósofos declararam que a ciência nada mais era do que o estudo de Deus. «Os céus proclamam a glória de Deus e o firmamento demonstra o Seu trabalho.»

A existência de objectos matemáticos num reino de ideias, independente das mentes humanas, não colocava dificuldades a Newton ou a Leibniz; como cristãos, eles *sabiam* que existia uma mente divina. Neste contexto, a existência de objectos ideais, tais como números ou formas geométricas, não é problema. O problema é, pelo contrário, explicar a existência de objectos materiais, não ideais. Depois de o racionalismo ter conseguido substituir o escolasticismo medieval, foi desafiado pelo materialismo e pelo empirismo: por Locke e Hobbes, na Grã-Bretanha, e pelos enciclopedistas, em França. Na competição entre racionalismo e empirismo foi o desenvolvimento das ciências naturais com base no método experimental que deu ao empirismo a vitória decisiva. A crença num universo material como realidade fundamental tornou-se a sabedoria convencional da ciência, sendo que a experiência e a observação eram os únicos meios legítimos de obter o conhecimento.

Os empiristas defendiam que todo o conhecimento, excepto o conhecimento matemático, provém da observação. Normalmente não tentavam explicar como se obtém o conhecimento matemático. Uma excepção foi John Stuart Mill. Ele propôs uma teoria empirista do conhecimento matemático, segundo a qual a matemática é uma ciência natural em nada diferente das outras. Por exemplo, sabemos que $3 + 4 = 7$ porque observamos que, ao juntarmos três botões com quatro botões, obtemos sete botões. Frege, em *Foundations of Arithmetic,* critica de modo acutilante a teoria simplista de Mill, sendo apenas no contexto da crítica de Frege que a filosofia matemática de Mill é hoje discutida*.

Na controvérsia filosófica, primeiro entre o racionalismo e o escolasticismo, e depois entre o racionalismo e as novas correntes radicais do empirismo e do materialismo, a santidade da geometria nunca foi desafiada. Os filósofos discutiam se partimos da razão (que os homens

*O livro de Lehman (1979) é uma tentativa recente de regressar a uma filosofia empirista da matemática. Neste livro, Lehman é influenciado pelo realismo de Hilary Putnam.

possuem como uma dádiva do divino) para descobrirmos as propriedades do mundo físico ou se temos apenas os sentidos corporais para descobrirmos as propriedades dos objectos físicos e do seu criador. Nestas lutas, ambos os lados tomavam como certo que o conhecimento geométrico não é problemático, mesmo que todo o outro conhecimento o seja. Para Hume, apenas os livros de matemática e de ciências naturais eram uma excepção à sua famosa instrução «lancem-nos às chamas». Nem mesmo ele encontrou problemas na definição do estatuto do conhecimento matemático.

Para os racionalistas, a matemática era o melhor exemplo para confirmar a sua visão do mundo. Para os empiristas, era um contra-exemplo embaraçoso que tinha de ser ignorado ou, de algum modo, explicado. Se, como parecia óbvio, a matemática contém conhecimento independente dos sentidos da percepção, o empirismo é inadequado para explicar todo o conhecimento humano. Esta dificuldade subsiste ainda hoje; é uma razão para os nossos problemas com a filosofia da matemática.

É possível que não tenhamos consciência de que o modelo científico moderno só ganhou supremacia no último século. No tempo de Russell e Whitehead, apenas a lógica e a matemática podiam ser ainda incluídas no conhecimento não empírico, isto é, obtido directamente pela razão.

A matemática sempre teve um lugar especial na luta entre o racionalismo e o empirismo. O matemático vulgar, com a sua crença de senso comum na matemática como conhecimento, é o último vestígio do racionalismo.

Do ponto de vista mais comum, hoje em dia, entre os cientistas a prevalência do platonismo como uma filosofia de trabalho tácito ou informal é uma anomalia digna de nota. Os pressupostos aceites em ciência são, e têm sido desde há muitos anos, os do materialismo, no que respeita à ontologia, e os do empirismo, no que respeita à epistemologia. Isto é, o mundo é todo «uma coisa», a que se chama «matéria» e que é estudada pela física; se a matéria se organiza em configurações suficientemente complicadas, torna-se objecto de ciências mais específicas, com metodologias próprias, como a química, a geologia e a biologia. Aprendemos coisas acerca do mundo observando-o e pensando sobre o que vemos. Até realizarmos as observações, não temos nada sobre que pensar.

No entanto, em matemática, temos conhecimento de coisas que nunca observámos e nunca poderemos observar. Pelo menos é este o ponto de vista ingénuo que assumimos quando não tentamos ser filosóficos.

No fim do século XVIII, o culminar da filosofia clássica foi devido a Kant, cujo trabalho tentou unificar as duas tradições em conflito, o racionalismo e o empirismo. A metafísica de Kant é a continuação do legado de Platão, da procura da certeza e da eternidade no conhecimento

humano. Kant queria refutar a crítica de Hume quanto à possibilidade de certeza no conhecimento humano. Ele fez uma distinção radical entre o númeno, as coisas em si, que nunca poderemos conhecer, e o fenómeno, as aparências, que são tudo o que os nossos sentidos nos dizem. Mas, apesar de todo o seu cepticismo, a principal preocupação de Kant era ainda o conhecimento *a priori* — conhecimento que era eterno e independente da experiência. Kant realizou a distinção entre dois tipos de conhecimento *a priori*. O conhecimento «analítico *a priori*», que é o que alcançamos através da análise lógica, devido ao próprio significado dos termos que utilizamos. Por outro lado, Kant, tal como os racionalistas, acreditava que possuímos ainda um outro tipo de conhecimento *a priori*, que não é uma simples verdade lógica. É o conhecimento «sintético *a priori*». As nossas intuições de tempo e espaço são, de acordo com Kant, exemplos deste tipo de conhecimento. Ele explica a natureza *a priori* afirmando que aquelas intuições são propriedades inerentes à mente humana. O nosso conhecimento de tempo é sistematizado pela aritmética, que é baseada na intuição de *sucessão*. O nosso conhecimento de espaço é sistematizado pela geometria. Para Kant, tal como para Platão, só existe uma geometria — aquela que hoje denominamos euclidiana, para a distinguir de muitos outros sistemas de conceitos, aos quais também chamamos geometrias. As verdades da geometria e da aritmética são-nos impostas pelo modo como as nossas mentes funcionam; isto explica por que elas são, supostamente, verdadeiras para todos, independentemente da experiência. As intuições de tempo e espaço, nas quais se baseiam a aritmética e a geometria, são objectivas, uma vez que são universalmente aceites por todas as mentes humanas. Não se afirma que elas existam fora da mente humana; no entanto, o mito de Euclides permanece como um elemento central da filosofia de Kant.

O dogma kantiano do *a priori* manteve-se como influência dominante na filosofia da matemática até ao século XX. Todas as três escolas fundacionistas tentaram preservar para a matemática o papel especial que Kant lhe tinha atribuído.

Fundamentos, achados e perdidos

O mito de Euclides manteve-se bem enraizado tanto entre filósofos como entre matemáticos até muito tarde no século XIX. A geometria era vista por todos, incluindo matemáticos, como a área de conhecimento mais firme e de maior confiança. A análise matemática — o cálculo e as suas extensões e ramificações — só tinha significado e legitimidade

devido à sua ligação com a geometria. Não necessitamos de utilizar o termo *geometria euclidiana* porque esse adjectivo só se tornou necessário depois de se reconhecer a possibilidade de existirem outras geometrias. Até esse reconhecimento, a geometria era simplesmente a geometria — o estudo das propriedades do espaço. Estas tinham uma existência absoluta e independente, eram objectivas e o exemplo supremo de propriedades do universo que eram exactas, eternas e que podiam ser conhecidas com toda a certeza pela mente humana.

No século XIX, houve vários desastres. Um desastre foi a descoberta de geometrias não euclidianas, que mostravam que se podia raciocinar com outros tipos de geometria.

Um desastre ainda maior foi o grande desenvolvimento da análise, que ultrapassou a intuição geométrica, por exemplo, com a descoberta de curvas que preenchem o espaço e curvas contínuas mas não diferenciáveis em nenhum ponto. Estas surpresas chocantes denunciaram a vulnerabilidade do único fundamento sólido — a intuição geométrica —, no qual se pensava que assentava a matemática. A perda da certeza na geometria era filosoficamente intolerável, pois implicava a perda de qualquer certeza no conhecimento humano. A geometria representava, desde Platão, o exemplo acabado da possibilidade de certeza no conhecimento humano.


Richard Dedekind
1831-1916


Karl Weierstrass
1815-1897

Os matemáticos do século XIX aceitaram o desafio. Conduzidos por Dedekind e Weierstrass, mudaram os fundamentos da matemática da geometria para a aritmética. Para tal, foi necessário encontrar uma construção do contínuo linear, isto é, o sistema dos números reais, e mostrar como é que este poderia ser construído a partir dos inteiros 1, 2, 3, ... Foram propostos três métodos diferentes, por Dedekind, Cantor e Weierstrass, para conseguir esse objectivo. Em todos os métodos, era preciso utilizar um conjunto infinito de números racionais para definir ou construir um número real. Assim, no esforço para reduzir a análise e a geometria à aritmética, foram conduzidos à introdução de conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática.

A teoria de conjuntos foi desenvolvida por Cantor como um novo e fundamental campo da

matemática por direito próprio. Parecia que a ideia de conjunto — uma colecção arbitrária de objectos distintos — era tão simples e fundamental que poderia ser o bloco constituinte a partir do qual toda a matemática poderia ser construída. Até a aritmética poderia ser despromovida (ou promovida) de estrutura fundamental a estrutura secundária, já que Frege demonstrou como podiam construir-se os números naturais a partir do nada — isto é, do conjunto vazio —, utilizando operações da teoria de conjuntos.

Alfred North Whitehead
1861-1947

No início, a teoria de conjuntos parecia quase o mesmo que a lógica. A relação de inclusão da teoria de conjuntos, *A* está contido em *B*, pode sempre ser reescrita como a relação lógica de implicação, «se *A*, então *B*». Assim, parecia possível que a teoria de conjuntos-lógica pudesse servir de fundamento para toda a matemática. «Lógica», neste contexto, refere-se às leis fundamentais do raciocínio, a pedra basilar do universo. A lei da contradição e as regras da implicação são tidas como objectivas e indubitáveis. Demonstrar que toda a matemática é apenas um desenvolvimento das leis da lógica seria justificar o platonismo, levando ao resto da matemática as certezas da própria lógica. Este era o «programa dos lógicos», seguido por Russell e Whitehead no seu livro *Principia Mathematica.*

Bertrand Russell
1872-1970

Uma vez que toda a matemática pode ser reduzida à teoria de conjuntos, só tinham de se estudar os fundamentos desta teoria. No entanto, foi o próprio Russell que descobriu que a noção aparentemente transparente de conjunto continha armadilhas inesperadas.

As controvérsias dos fins do século XIX, início do século XX, apareceram devido à descoberta de contradições na teoria de conjuntos. Uma palavra especial — *antinomias* — foi utilizada como eufemismo para contradições deste tipo.

Gottlob Frege
1848-1925

Os paradoxos surgiram da crença de que qualquer predicado razoável — qualquer descri-

ção verbal que parecesse fazer sentido — poderia ser utilizado para definir um conjunto, o conjunto das coisas que partilhavam a referida propriedade.

O mais famoso exemplo de tal conjunto foi descoberto por Russell. Para descrever o paradoxo de Russell definimos um «conjunto *R*» como «um conjunto que se inclui a si próprio» (um exemplo é «o conjunto de todos os objectos que podem ser descritos com exactamente dezasseis palavras em português»). Considere-se agora um outro conjunto *M:* o conjunto de todos os conjuntos possíveis, excepto os conjuntos *R.* Será *M* um conjunto *R?* Não. *M* não é um conjunto *R?* Outra vez, não. Moral: a definição de *M,* que parecia inofensiva, embora um pouco estranha, é contraditória.

Russell enviou o seu exemplo numa carta a Gottlob Frege. Frege ia publicar uma obra monumental na qual a aritmética era reconstruída sobre a teoria de conjuntos na forma intuitiva. Frege acrescentou um apêndice ao seu tratado: «Um cientista não pode ser submetido a nada mais indesejável do que ver os fundamentos cederem exactamente quando o seu trabalho está terminado. Encontrei-me nesta posição devido a uma carta que recebi do Sr. Bertrand Russell na altura em que o trabalho estava prestes a ser publicado.»

O paradoxo de Russell e outras antinomias mostraram que a lógica intuitiva, longe de ser mais segura do que a matemática clássica, era, na verdade, mais arriscada, pois podia levar a contradições de natureza nunca vista na aritmética ou na geometria.

Esta foi a «crise dos fundamentos», assunto central nas famosas controvérsias do primeiro quarto deste século. Foram propostos três remédios principais.

O programa do «logicismo», a escola de Frege e Russell, era encontrar uma reformulação da teoria de conjuntos que evitasse o paradoxo de Russell e, assim, salvasse o projecto de Frege-Russell-Whitehead de estabelecer a matemática tendo a lógica como fundamento.

Este programa desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da lógica. Mas foi um falhanço em relação aos objectivos iniciais. Quando a teoria de conjuntos acabou de ser remendada para excluir os paradoxos, era uma estrutura complicada, que mal podia identificar-se com a lógica, no sentido filosófico das «regras para raciocinar correctamente». Deste modo, tornou-se insustentável dizer que a matemática nada mais é do que lógica — que a matemática é uma enorme tantologia. Russell escreveu *(Portraits from Memory):*

> Queria a certeza da mesma maneira que as pessoas querem a fé da religião. Pensava que a certeza seria encontrada mais provavelmente na matemática do que em qualquer outro lado. Mas descobri que muitas demonstrações matemáticas, que os meus professores queriam que eu aceitasse, estavam

cheias de falácias e que, se, na verdade, a certeza pudesse ser encontrada na matemática, teria de ser num novo campo, com fundamentos mais sólidos do que os que até aí tinham sido julgados seguros. Mas, à medida que o trabalho avançava, lembrava-me constantemente da fábula do elefante e da tartaruga. Depois de construir um elefante onde o mundo da matemática podia assentar, descobri que o elefante era instável e decidi construir uma tartaruga para evitar que o elefante caísse. Mas a tartaruga não era mais estável do que o elefante, e, após cerca de vinte anos de trabalho árduo, cheguei à conclusão de que não podia fazer mais nada para tornar o conhecimento matemático isento de dúvida.

A seguir aos lógicos, a segunda maior escola foi a dos construtivistas. Esta teve origem com o topólogo holandês L. C. J. Brouwer perto de 1908. A posição de Brouwer era a de que os números naturais são-nos dados a conhecer por uma intuição fundamental, que é o ponto de partida para toda a matemática. Ele exigiu que toda a matemática se baseasse construtivamente nos números naturais. Ou seja, os objectos matemáticos

$$
\begin{array}{lll}
{*}54\cdot42. & \vdash::\alpha\in 2.\supset:.\beta\subset\alpha.\quad !\beta.\beta\neq\alpha.\equiv.\beta\in\iota\text{“}\alpha & \\
\textit{Dem.} & & \\
\vdash.{*}54.4 & \supset\vdash::\alpha=\iota\text{‘}x\cup\iota\text{‘}y.\supset:. & \\
 & \beta\subset\alpha.\exists!\beta.\equiv:\beta=\Lambda.\vee.\beta=\iota\text{‘}x.\vee.\beta=\iota\text{‘}y.\vee.\beta=\alpha:\exists!\beta: & \\
[{*}24\cdot53\cdot56.{*}51\cdot161] & \equiv:\beta=\iota\text{‘}x.\vee.\beta=\iota\text{‘}y.\vee.\beta=\alpha & (1) \\
\vdash.{*}54\cdot25.\text{ Transp.}{*}52\cdot22. & \supset\vdash:x\neq y.\supset.\iota\text{‘}x\cup\iota\text{‘}y\neq\iota\text{‘}x.\iota\text{‘}x\cup\iota\text{‘}y\neq\iota\text{‘}y: & \\
[{*}13\cdot12] & \supset\vdash:\alpha=\iota\text{‘}x\cup\iota\text{‘}y.x\neq y.\supset.\alpha\neq\iota\text{‘}x.\alpha\neq\iota\text{‘}y & (2) \\
\vdash.(1).(2) & \supset\vdash::\alpha=\iota\text{‘}x\cup\iota\text{‘}y.x\neq y.\supset:. & \\
 & \beta\subset\alpha.\exists!\beta.\beta\neq\alpha.\equiv:\beta=\iota\text{‘}x.\vee.\beta=\iota\text{‘}y: & \\
[{*}51\cdot235] & \equiv:(\exists z)\cdot z\in\alpha.\beta=\iota\text{‘}z: & \\
[{*}37\cdot6] & \equiv:\beta\in\iota\text{“}\alpha & (3) \\
\vdash.(3).{*}11\cdot11\cdot35.{*}54\cdot101.\supset\vdash.\text{Prop} & & \\
{*}54\cdot43. & \vdash:.\alpha,\beta\in 1.\supset:\alpha\cap\beta=\Lambda.\equiv.\alpha\cup\beta\in 2 & \\
\textit{Dem.} & & \\
\quad\vdash.{*}54\cdot26.\supset\vdash:.\alpha=\iota\text{‘}x.\beta=\iota\text{‘}y.\supset:\alpha\cup\beta\in 2. & \equiv.x\neq y. & \\
\quad[{*}51\cdot231] & \equiv.\iota\text{‘}x\cap\iota\text{‘}y=\Lambda. & \\
\quad[{*}13\cdot12] & \equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda & (1) \\
\quad\vdash.(1).{*}11\cdot11\cdot35.\supset & & \\
\qquad\vdash:.(\exists x,y).\alpha=\iota\text{‘}x.\beta=\iota\text{‘}y.\supset:\alpha\cup\beta\in 2. & \equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda & (2) \\
\quad\vdash.(2).{*}11\cdot54.{*}52\cdot1.\supset\vdash.\text{ Prop} & &
\end{array}
$$

Desta proposição resulta, depois de definida a adição aritmética, que 1 + 1 = 2.

Russell e Whitehead foram pioneiros num programa para reduzir a matemática à lógica. Nesta reprodução, depois de 362 páginas, é estabelecida a proposição aritmética 1 + 1 = 2

Fonte: *Principia Mathematica*, CUP, 1910

não podem ser considerados com significado, não pode dizer-se que existam, a não ser que sejam obtidos por construção, num número finito de passos, a partir dos números naturais.

Para os construtivistas muitas das demonstrações vulgares da matemática clássica não são válidas. Em alguns casos, conseguem encontrar uma demonstração construtiva. Porém, noutros casos, provam que uma demonstração construtiva é impossível. Teoremas considerados bem estabelecidos na matemática clássica são declarados falsos para a matemática construtiva.

Um exemplo importante é a «lei da tricotomia»: «Todo o número real ou é positivo, ou negativo, ou zero.»

Quandos os números reais são construídos através da teoria de conjunto, segundo, por exemplo, a receita de Dedekind ou Cantor, a lei da tricotomia pode ser demonstrada como um teorema. Ela desempenha um papel fundamental em todo o cálculo e análise.

Contudo, Brouwer deu um exemplo de um número real para o qual não é possível demonstrar construtivamente qualquer das propriedades de ser um número positivo, negativo ou zero. (Para pormenores, v. o próximo capítulo, «π e $\hat{\pi}$»). Do ponto de vista de Brouwer, esse número é um contra-exemplo e mostra que a lei da tricotomia é falsa.

De facto, a demonstração clássica da lei da tricotomia utiliza o princípio da contradição (a lei do terceiro excluído) e, portanto, não é uma demonstração válida de acordo com os critérios de Brouwer.

Embora muitos matemáticos de primeira linha tenham afirmado o desacordo e a dúvida em relação aos métodos não construtivos e à utilização livre de conjuntos infinitos, o apelo de Brouwer a uma reconstrução da matemática desde a base parecia, para a maioria dos matemáticos, pouco razoável, mesmo fanatismo.

Hilbert estava particularmente alarmado (*Hilbert,* C. Reid, p. 155): «O que Weyl e Brouwer fazem conduz ao mesmo que seguir as pisadas de Kronecker! Eles procuram salvar a matemática, deitando fora tudo o que é problemático [...] amputaram e cilindraram a ciência. Se seguíssemos as reformas que eles sugerem, correríamos o risco de perder uma grande parte do nosso precioso tesouro!»

David Hilbert
1862-1943

Hilbert tentou defender a matemática da crítica de Brouwer, dando uma demonstração matemática da consistência da matemática clássica. Mais do que isso, propôs-se realizá-la utilizando argumentos puramente finitos, do tipo combinatório — argumentos que Brouwer não podia rejeitar.

Esta proposta dividia-se em três passos:

1) Introdução de uma linguagem formal e de regras formais de inferência, de modo que cada «demonstração correcta» de um teorema clássico pudesse ser representada por uma derivação formal, partindo de axiomas, podendo cada passo ser verificado mecanicamente. Isto já tinha sido conseguido em grande parte por Frege, Russell e Whitehead.
2) Desenvolvimento de uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal, encarada como um conjunto finito de símbolos, sujeitos a permutações e rearranjos segundo as regras da inferência, encaradas agora como regras para transformar fórmulas. Esta teoria era denominada «metamatemática».
3) Demonstração por argumentos unicamente finitos de que uma contradição, tal como $1 = 0$, não pode ser encontrada neste sistema.

Desta forma, seria dada à matemática uma fundamentação segura — como que uma garantia de consistência.

Este tipo de fundamentação em nada se assemelha à fundamentação baseada numa teoria que se sabe ser verdadeira, como a geometria se julgava verdadeira ou, pelo menos, impossível de pôr em dúvida, tal como é suposto ser impossível duvidar da lei da contradição da lógica elementar.

Os fundamentos formalistas de Hilbert, assim como os dos lógicos, ofereciam a certeza e a segurança a um preço. Tal como a interpretação dos lógicos tentava tornar a matemática segura fazendo dela uma tautologia, a interpretação formalista tentava o mesmo tornando a matemática um jogo sem sentido. O «programa de demonstração e teoria» só se aplica depois de se codificar a matemática numa linguagem formal e de as suas demonstrações se escreverem num formato verificável pela máquina. O significado dos símbolos transforma-se em algo extramatemático.

Nos seus textos e conversas, Hilbert mostra uma convicção profunda de que os problemas matemáticos são questões acerca de objectos reais e têm respostas com significado, que são verdadeiras, do mesmo modo que uma afirmação acerca da realidade é verdadeira. Se estava preparado para advogar uma interpretação formalista da matemática, era este o preço que considerava necessário para obter a certeza (D. Hilbert, On the infinite», in *Philosophy of Mathematics,* de Benacerraf e Putnam):

> O objectivo da minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos [...]. A presente situação, em que encontramos paradoxos, é intolerável. Imaginem só, as definições e os métodos dedutivos

que toda a gente aprende, ensina e utiliza na matemática, o modelo da verdade e da certeza, conduzem a absurdos! Se o raciocínio matemático é defeituoso, onde vamos encontrar a verdade e a certeza?

Todavia, a certeza não seria obtida, nem mesmo a este preço. Em 1930, os teoremas da incompletude de Gödel demonstraram que era impossível alcançar o programa de Hilbert — que qualquer sistema formal consistente e suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a própria consistência. A procura de fundamentos seguros nunca se restabeleceu desta derrota.

O programa de Hilbert baseava-se em duas premissas não estudadas: primeiro, a premissa kantiana de que *algo* na matemática — pelo menos a parte «puramente finita» — é um fundamento sólido, acima de qualquer dúvida; segundo, a premissa formalista de que uma teoria acerca de afirmações formais solidamente fundamentada poderia validar a actividade matemática da vida real, onde a formalização, mesmo como possibilidade hipotética, só está presente (se estiver) num segundo plano muito remoto. A primeira premissa era partilhada pelos construtivistas; a segunda, claro, era por eles rejeitada.

O programa da formalização resume-se a construir uma aplicação da teoria de conjuntos e análise sobre uma parte de si própria — nomeadamente sobre a combinatória finita. Ou seja, no máximo, poderíamos dizer que toda a matemática seria consistente se o princípio «finitista» que existe na «metamatemática», como era conhecida a matemática *sobre* a matemática de Hilbert, fosse, ele próprio, de confiança. Mais uma vez, estamos à procura da última tartaruga por baixo do último elefante.

A última tartaruga, ou último elefante, é, na realidade, o sintético *a priori* kantiano, a intuição. Embora Hilbert não se refira explicitamente a Kant, a sua convicção de que a matemática pode e deve fornecer-nos a verdade e a certeza, «ou em que outro lugar vamos encontrá-las?», está na linha da herança platónica transmitida, através dos racionalistas, a Kant, e depois ao meio intelectual da Europa ocidental no século XIX. Neste sentido, ele é tão kantiano como Brouwer, cujo rótulo de construtivismo admite abertamente a sua herança kantiana.

Para Brouwer, o programa de Hilbert estava mal posto no passo 1, porque se baseava na identificação da própria matemática com as fórmulas usadas para a representar ou a expressar. Porém, foi só com esta transição para linguagens e fórmulas que Hilbert conseguiu antever a possibilidade de uma justificação *matemática* para a matemática.

Brouwer, que tal como Hilbert tinha como certo que a matemática podia e devia ser estabelecida em fundamentos «sólidos» e «firmes»,

tomou a outra rota, insistindo em que a matemática tem de começar pelo intuitivo, o finito, e deve conter apenas o que é obtido de modo construtivo deste ponto de partida intuitivo. Intuição aqui significa a intuição para *contar* e apenas isso. Tanto para Brouwer como para Hilbert, aceitar a intuição geométrica como um «dado» básico ou fundamental a par da aritmética teria parecido retrógrado e inaceitável *no contexto das discussões sobre os fundamentos.* Ao mesmo tempo, para Brouwer, assim como para Hilbert, a utilização da intuição geométrica no seu trabalho «regular» (sem ser sobre os fundamentos) de investigação matemática era um facto adquirido. Brouwer não se sentia obrigado a sacrificar o seu trabalho sobre topologia ao seu dogma da intuição, da mesma maneira que Hilbert não se sentia obrigado a trabalhar com fórmulas, em vez de significados, na sua investigação. Para ambos, a divisão entre a sua prática matemática usual e as suas teorias dos fundamentos não parecia necessitar de qualquer explicação ou desculpa. Diz-se que Brouwer, nos seus últimos anos, estava preparado para sacrificar a sua investigação em topologia ao seu dogma da intuição.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

D. Hilbert; S. Kleene; C. Reid.

A filosofia formalista da matemática

Em meados do século XX o formalismo tinha-se tornado a atitude filosófica dominante dos livros de estudo e outros escritos «oficiais» sobre matemática. O construtivismo permaneceu uma heresia com apenas alguns apoiantes. Todos (ou quase todos) os matemáticos acreditavam e acreditam no platonismo; no entanto, como uma religião secreta, este é admitido em privado e raras vezes mencionado em público.

O formalismo contemporâneo descende do formalismo de Hilbert, mas não é a mesma coisa. Hilbert acreditava na realidade da matemática finita. Inventou a metamatemática para justificar a matemática do infinito. Este realismo do finito, com formalismo para o infinito, é ainda defendido por alguns autores. Mas, normalmente, o formalista não se incomoda com esta distinção. Para ele a matemática, começando na aritmética, é apenas um jogo de dedução lógica.

O formalista define a matemática como a ciência da demonstração rigorosa. Noutras áreas algumas teorias podem ser defendidas com base

em experiências ou plausibilidade, mas na matemática, diz o formalista, ou temos uma demonstração ou não temos nada.

Qualquer demonstração lógica deve ter um ponto de partida. Deste modo, um matemático tem de começar com alguns termos não definidos e algumas afirmações, sobre esses termos, não demonstradas. Esses termos e essas afirmações denominam-se «hipóteses» e «axiomas», respectivamente. Por exemplo, na geometria plana temos os termos não definidos *ponto* e *recta,* e o axioma «através de dois pontos distintos passa uma e uma só linha recta». O formalista explica que a importância lógica desta afirmação não depende de nenhuma imagem mental que lhe associemos. Apenas a tradição nos impede de usar outras palavras em vez de ponto e linha recta — «através de dois *bleeps* distintos passa uma e uma só *neep*».

De acordo com a interpretação que fizermos dos termos *ponto* e *recta,* assim estes axiomas podem ser verdadeiros ou falsos. Presumivelmente, existe alguma interpretação na qual eles são verdadeiros; caso contrário, não fazia sentido interessarmo-nos por eles. Porém, no que diz respeito à matemática pura, a interpretação que damos aos axiomas é irrelevante. Só nos interessam as deduções lógicas válidas que podemos fazer a partir deles.

Os resultados assim deduzidos denominam-se *teoremas.* Não podemos dizer que um teorema é verdadeiro, tal como não podemos dizer que os axiomas são verdadeiros. Como afirmações de matemática pura, os teoremas não são nem verdadeiros nem falsos, visto que se referem a termos não definidos. Em matemática apenas podemos dizer que os teoremas são deduzidos logicamente dos axiomas. Deste modo, os teoremas matemáticos não têm conteúdo algum; não são *sobre* nada. Por outro lado, segundo o formalista, eles estão isentos de qualquer dúvida ou erro possível, porque o processo de demonstração rigorosa e dedução não tem falhas nem vícios de raciocínio.

Resumindo, para o formalista a matemática é a ciência da dedução formal, dos axiomas para os teoremas. Os seus termos primitivos são indefinidos. As suas afirmações não têm conteúdo até as interpretarmos. Por exemplo, podemos interpretar afirmações da geometria em termos de distâncias entre locais físicos.

Em alguns livros de estudo o ponto de vista formalista é apresentado como um facto, e o leitor ou estudante menos crítico pode aceitá-lo como o ponto de vista autorizado ou «oficial». Mas tal não é um facto definitivo, antes um problema complexo de interpretação. O leitor tem o direito a uma atitude céptica e a esperar que lhe apresentem justificações para este ponto de vista.

Na realidade, uma breve reflexão mostra que a atitude formalista não é plausível de acordo com a experiência matemática normal. Todos os professores da escola primária falam sobre «factos de aritmética» ou «factos da geometria», e na escola secundária o teorema de Pitágoras e o teorema da factorização em números primos são ensinados como afirmações verdadeiras sobre triângulos rectângulos ou sobre inteiros. Na visão oficial qualquer referência a factos ou verdades é incorrecta.

Um argumento a favor da visão oficial pode encontrar-se na história da geometria, como uma resposta à perda de influência da geometria euclidiana.

Para Euclides, os axiomas da geometria não eram suposições, mas «verdades evidentes». O ponto de vista formalista resulta em parte da rejeição da ideia de que é possível partir de «verdades evidentes».

Na nossa discussão sobre a geometria não euclidiana no capítulo 5, vimos como a tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides (o postulado das paralelas, que não era tão «evidente» como os outros quatro) conduziu à descoberta da geometria não euclidiana, na qual se supõe que o postulado das paralelas é falso.

Poderemos então afirmar que *tanto* o postulado das paralelas de Euclides *como* a sua negação são verdadeiros? O formalista conclui que, se queremos manter a liberdade enquanto matemáticos de estudarmos tanto a geometria euclidiana como a não euclidiana, temos de desistir da noção de que qualquer deles é verdadeiro. Basta que cada um seja consistente.

Na realidade, as geometrias euclidiana e não euclidiana só parecem entrar em conflito se acreditarmos num espaço físico objectivo, que obedece a um só conjunto de leis e que ambas as teorias tentam descrever. Se desistirmos desta convicção, então, a geometria euclidiana e a não euclidiana deixam de ser duas candidatas rivais para a solução do mesmo problema, sendo apenas duas teorias matemáticas diferentes. O postulado das paralelas é verdadeiro para a linha recta euclidiana e falso para a não euclidiana. Mas terão os teoremas da geometria significado, mesmo independentemente de uma interpretação física? Poderemos ainda utilizar as palavras *verdadeiro* e *falso* acerca das afirmações da geometria pura? O platonista diria que sim, uma vez que os objectos da matemática existem no seu próprio mundo separados do mundo das aplicações físicas. O formalista, pelo contrário, diz que não, pois as afirmações não podem ser verdadeiras ou falsas, porque elas não são acerca de nada, não significam nada.

O formalista faz uma distinção entre a geometria enquanto estrutura dedutiva e a geometria como ciência descritiva. Só a primeira é conside-

rada matemática. A utilização de figuras, diagramas ou até de imagens mentais é considerada não matemática. Em princípio, elas não deveriam ser necessárias. Consequentemente, o formalista considera-as desadequadas para um texto matemático, talvez mesmo para uma aula de matemática.

Porque ensinamos *esta* definição particular, e não outra qualquer? Porquê *estes* axiomas, e não outros? Tais questões, para o formalista, são pré-matemática. Se chegarem a ser incluídas no seu livro de texto ou nas suas aulas, sê-lo-ão muito resumidamente e como uma nota, entre parêntesis.

Que exemplos ou aplicações existem para a teoria geral que ele desenvolveu? Isso também não é estritamente relevante e pode ser deixado para um comentário ou para ser explorado como exercício.

Do ponto de vista do formalista, não começamos a fazer matemática enquanto não tivermos elaborado algumas hipóteses e iniciado uma demonstração. Logo que alcançamos as nossas conclusões, a matemática acaba. Qualquer coisa a mais que dissermos sobre o assunto será, em certo sentido, supérflua. Medimos o nosso sucesso num curso através daquilo que *demonstrámos* nas aulas. A questão do que aprendemos e do que a audiência compreendeu é outra coisa — não é uma questão matemática.

Uma razão para o domínio do formalismo foi a sua ligação com o positivismo lógico. Esta foi a corrente dominante da filosofia da ciência durante as décadas de 40 e 50. Os seus efeitos ainda se fazem sentir, quanto mais não seja porque nada de definitivo surgiu para o substituir. A «escola de Viena», criadora do positivismo lógico, advogava uma ciência unificada, codificada num cálculo lógico formal e com um único método dedutivo. A formalização foi elevada a objectivo de todas as ciências. A formalização implicava a escolha de um vocabulário de termos básicos, a elaboração de leis fundamentais, usando estes termos e o desenvolvimento lógico de uma teoria a partir dessas leis fundamentais. O exemplo seguido foi o da mecânica clássica e quântica.

De modo a relacionar a teoria formal com os dados experimentais, cada ciência tem de ter regras próprias de interpretação, que não fazem parte da teoria formal. Por exemplo, na mecânica clássica existem regras para a medição física das quantidades básicas (massa, comprimento, tempo). A mecânica quântica tem as suas regras próprias, através das quais o termo *observável* da teoria formal é relacionado com as medidas experimentais. Neste esquema das coisas, a matemática aparece como a ferramenta para formular e desenvolver a teoria. As leis fundamentais são fórmulas matemáticas. Na mecânica são equações diferen-

ciais. A teoria é desenvolvida deduzindo consequências destas leis, utilizando raciocínio matemático.

A própria matemática é vista, não como uma ciência, mas como uma linguagem para as outras ciências. Não é uma ciência porque não tem nenhum objecto de estudo. Não tem dados observacionais aos quais se possam aplicar regras de interpretação. Nas categorias filosóficas que o positivismo lógico admite, a matemática parece ser *apenas* uma estrutura formal. Assim, o positivismo lógico na filosofia da ciência conduz ao formalismo na filosofia da matemática.

Como filosofia da matemática, o formalismo não é compatível com o modo de pensar dos matemáticos no seu trabalho. Mas isto não foi um problema pára os filósofos positivistas da ciência. Uma vez que a sua orientação principal era a física teórica, eles podiam encarar a matemática como sendo apenas uma ferramenta, e não como uma área independente e em crescimento. Do ponto de vista do utilizador, é possível, e às vezes até é conveniente, identificar a matemática com a sua apresentação axiomática encontrada nos livros de estudo. Do ponto de vista do produtor, a apresentação axiomática é secundária. É apenas um aperfeiçoamento, construído depois de o trabalho principal, o processo de descoberta matemática, ter sido completado. Este facto pode ser ignorado pelo físico e ainda mais pelo filósofo da física, cujas noções de matemática provêm principalmente da lógica e da filosofia matemática, e não da participação no desenvolvimento da própria matemática.

O positivismo lógico já não é popular na filosofia da ciência. Um ponto de vista histórico-crítico, derivado em grande parte do trabalho de Karl Popper, existe agora como alternativa; mas pouco efeito teve sobre a filosofia da matemática.

Russel, Frege e Wittgenstein deixaram uma escola de filosofia analítica que afirma que o problema central da filosofia é a análise do significado, sendo a lógica a sua ferramenta essencial. Uma vez que a matemática é o ramo do conhecimento cuja estrutura lógica é mais bem compreendida, afirma-se que a filosofia da matemática é a área mais avançada da filosofia e modelo para as outras áreas da filosofia. Como a filosofia analítica é o estilo dominante da filosofia anglo-americana, tende a perpetuar a identificação da filosofia da matemática com a lógica e o estudo de sistemas formais.

Deste ponto de vista, torna-se totalmente invisível um problema fundamental para o matemático. O problema consiste em dar uma justificação filosófica do desenvolvimento da matemática, da matemática pré-formal, da matemática da sala de aula e dos seminários, incluindo um estudo de como esta matemática pré-formal se relaciona e é afectada pela formalização.

Como exemplo mais influente do formalismo enquanto estilo de exposição matemática temos os textos de um grupo conhecido colectivamente como Nicolas Bourbaki. Sob este pseudónimo, foi publicada uma série de livros básicos para estudos de pós-graduação sobre teoria de conjuntos, álgebra e análise, que tiveram uma influência enorme em todo o mundo nas décadas de 50 e 60.

O estilo formalista penetrou gradualmente em níveis cada vez mais elementares no ensino da matemática, primeiro nas licenciaturas e, finalmente, sob a designação de «matemática moderna», invadiu até os jardins infantis, com textos pré-escolares sobre teoria de conjuntos. Foi inventado um jogo de lógica formal, denominado *WFF and proof,* para ensinar as crianças da escola primária a reconhecerem uma «fórmula bem formada»* (WFF) de acordo com a lógica formal.

Recentemente tem crescido uma reacção contra o formalismo. Na investigação matemática recente há uma viragem em direcção ao concreto e à aplicação. Em textos e tratados existe mais respeito pelos exemplos e menos rigidez na exposição formal. A filosofia formalista da matemática é a fonte intelectual do estilo formalista do trabalho matemático. Os sinais parecem indicar que, em breve, a filosofia formalista perderá o seu estatuto privilegiado.

Lakatos e a filosofia da dúvida

Imre Lakatos
1922-1973

O fundacionismo, isto é, a tentativa de estabelecer uma base para a indubitabilidade da matemática, dominou a filosofia da matemática durante o século XX. Uma alternativa radicalmente diferente foi apresentada no notável trabalho de Imre Lakatos, que discutiremos agora. Este trabalho foi uma repercussão das novas ideias na filosofia da ciência.

Em ciência, a procura dos «fundamentos» conduz ao problema tradicional da «lógica indutiva»: como se formulam leis gerais a partir de experiências e observações particulares. Em 1934 houve uma revolução na filosofia da ciência, quando Karl Popper propôs que não é possível nem necessário justificar as leis da ciência

* *Well formed formula. (N. do T.)*

através da justificação do raciocínio indutivo. Popper afirmou que as teorias científicas não são derivadas indutivamente dos factos; antes são inventadas como hipóteses, especulações, até mesmo palpites, sendo, depois, sujeitas aos testes experimentais, nos quais os críticos tentam refutá-las. Uma teoria só tem o direito de ser considerada científica, disse Popper, se for, em princípio, capaz de ser testada e de se arriscar a ser refutada. Uma vez ultrapassados estes testes, a teoria adquire um grau de credibilidade que lhe permite estabelecer-se, mas nunca é *provada*. Uma teoria científica pode ser objectivamente verdadeira, mas nunca podemos sabê-lo com certeza.

Embora as ideias de Popper tenham sido criticadas e sejam, por vezes, hoje em dia, consideradas facciosas e incompletas, a sua crítica do dogma indutivista trouxe uma mudança fundamental ao modo como as pessoas pensam sobre o conhecimento científico.

Enquanto Popper e outros pensadores recentes transformaram a filosofia da ciência, a filosofia da matemática permaneceu relativamente estagnada. Vivemos ainda sob o impacto das grandes controvérsias fundacionistas do princípio do século XX. O formalismo, a intuição e o logicismo deixaram a sua marca sob a forma de um certo programa de investigação matemática que acabou por fazer contribuições próprias para o corpo da matemática. Como programas *filosóficos*, como tentativas para estabelecer fundamentos seguros para o conhecimento matemático, todos eles percorreram o seu caminho e desapareceram ou esgotaram-se. No entanto, permaneceu, como resíduo, um consenso implícito de que a filosofia da matemática *é* pesquisa sobre os seus fundamentos. Se penso que a investigação sobre os fundamentos é desinteressante ou irrelevante, então, simplesmente não me interesso por filosofia (privando-me, assim, de qualquer hipótese de confrontar e clarificar as minhas próprias incertezas acerca do significado, da natureza, do objectivo ou da importância da investigação matemática).

Lakatos entrou em cena como um filósofo entendido em matemática e seguidor das teorias de Popper sobre o conhecimento científico. Lakatos era licenciado em Matemática, Física e Filosofia em Debrecen (1944); era também um sobrevivente do nazismo. As suas mãe e avó morreram em Auschwitz. (Nasceu com o nome de Lipschitz, mudou para Imre Molnar em 1944, por segurança, por causa dos Alemães, e depois para Imre Lakatos, quando adquiriu algumas camisas com o monograma I. L.) Depois da guerra, foi um comunista activo e, durante algum tempo, um importante funcionário do Ministério da Educação. Em 1950, foi preso e cumpriu uma pena de três anos. Quando foi libertado, encontrou emprego, com a ajuda de Rényi, como tradutor de obras matemáticas para húngaro;

um dos livros que traduziu foi *How to Solve It*, de Pólya. A seguir à revolta de 1956, fugiu da Hungria, acabando por ir parar a Inglaterra, onde sofreu a influência de Popper e começou a trabalhar numa dissertação de doutoramento em Filosofia. Popper e Pólya são, em conjunto, os padrinhos do trabalho de Lakatos; foi seguindo uma sugestão de Pólya que escolheu para seu tema a história da fórmula de Euler-Descartes: $V - E + F = 2$ (v. capítulo 6, «A criação de matemática nova).

Em vez de apresentar símbolos e regras de combinação, apresenta seres humanos, um professor e os seus estudantes. Em vez de apresentar um sistema construído a partir dos primeiros princípios, apresenta um choque de visões, argumentos e contra-argumentos. Em vez da matemática esqueletizada e fossilizada, apresenta a matemática a desenvolver-se a partir de um problema e de uma conjectura, com uma teoria a tomar forma diante dos nossos olhos, no calor do debate e do desacordo, dando a dúvida lugar à certeza e, depois, à dúvida renovada.

Proofs and Refutations é o nome da obra-prima de Lakatos. Durante quinze anos, foi uma espécie de clássico subterrâneo entre os matemáticos, conhecido apenas pelos poucos intrépidos que se aventuravam a ver os volumes do *British Journal for Philosophy of Science,* onde foi publicado, numa série de quatro artigos, em 1963. Finalmente, foi publicado, sob a forma de livro, pela Oxford University Press, em 1976, três anos depois de Lakatos, que tinha 51 anos, ter morrido devido a um tumor cerebral.

Proofs and Refutations utiliza a história como texto onde se baseia o seu sermão: também a matemática, tal como as ciências naturais, é falível, e não induvidável; também ela se desenvolve pela crítica e correcção de teorias, que nunca estão totalmente livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro ou engano. Partindo de um problema ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos. Novas demonstrações explicam contra-exemplos antigos e novos contra-exemplos ameaçam demonstrações antigas. Para Lakatos, «demonstração» neste contexto de matemática informal não significa um processo mecânico, que conduz à verdade numa cadeia inquebrável desde as hipóteses às conclusões. Significa antes explicações, justificações, elaborações que tornam a conjectura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que vai ficando mais pormenorizada e precisa sob a pressão dos contra-exemplos.

Cada passo da demonstração está sujeito à crítica, que pode ser apenas cepticismo ou um contra-exemplo para um determinado argumento. Um contra-exemplo que desafia um dado passo do argumento é denominado, por Lakatos, um «contra-exemplo local»; um contra-exemplo que não

desafia o argumento, mas a própria conclusão, é denominado contra-exemplo global.

Deste modo, Lakatos aplicou a sua análise epistemológica não à matemática formalizada, mas à matemática *informal,* ao processo de desenvolvimento e descoberta, que, evidentemente, é a matemática conhecida dos matemáticos e estudantes de matemática. Na realidade, a matemática formalizada, à qual a maior parte da filosofia recente é dedicada, é praticamente impossível de encontrar, onde quer que procuremos, fora dos textos e revistas de lógica simbólica.

Proofs and Refutations está escrito na forma de um diálogo de sala de aula, continuação de outro diálogo no livro *Induction and Analogy in Mathematics* de Pólya. O professor apresenta a demonstração tradicional, devida a Cauchy, da fórmula de Euler, na qual as arestas de um poliedro estão esticadas de modo a formarem uma rede no plano, e depois são reduzidas sucessivamente até um único triângulo. Logo que a demonstração está completa, a turma produz uma série de contra-exemplos. A batalha começou. O que provou a demonstração? O que conhecemos em matemática, e como? A discussão continua para níveis cada vez mais elaborados de sofisticação, tanto matemática como lógica. Existem sempre vários pontos de vista em concorrência e muitas reviravoltas quando uma personagem muda o seu ponto de vista e adopta uma posição que acaba de ser abandonada pelo antagonista.

Em oposição a este fogo-de-artifício dialéctico, as notas de rodapé contam-nos a história genuína e documentada da conjectura de Euler--Descartes com um pormenor e uma complexidade surpreendentes. O texto principal é, em parte, uma «reconstrução racional» da história real; ou talvez fosse melhor dizer, como Lakatos o disse uma vez, que a história real é uma paródia da sua reconstrução racional.

Proofs and Refutations é um trabalho fantástico. O efeito do seu polémico brilhantismo, da sua complexidade de argumentação, da sua sofisticação propositada e do seu peso de aprendizagem histórica é atordoar o leitor.

Seria justo afirmar que, em *Proofs and Refutations,* Lakatos *defende* que as filosofias dogmáticas da matemática (logicista ou formalista) são inaceitáveis e mostra que é possível uma filosofia popperiana da matemática. No entanto, não cumpre o programa de reconstruir a filosofia da matemática com uma epistemologia da falibilidade.

No texto principal de *Proofs and Refutations* ouvimos as personagens do autor, mas não o próprio autor; ele mostra-nos a matemática como a vê, mas não torna explícita a importância do que está a mostrar. Ou melhor, mostra-nos essa importância só no sentido crítico, especialmente

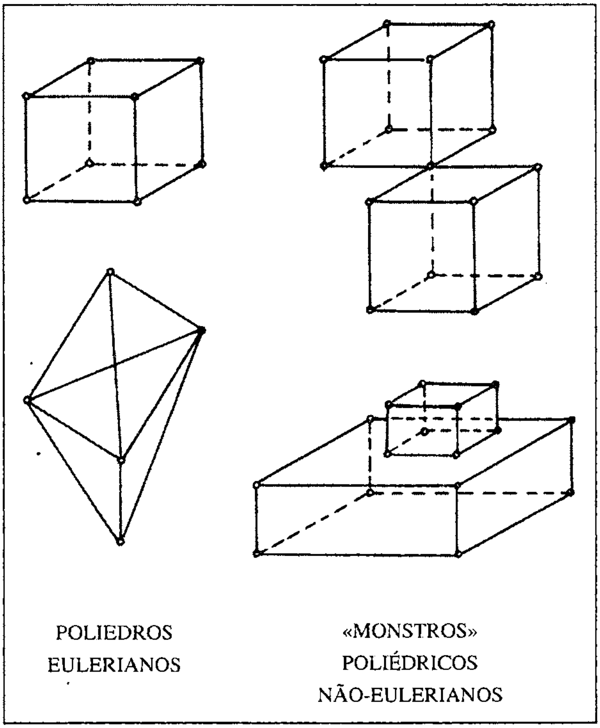
num ataque total, de unhas e dentes, ao formalismo. Mas qual é a importância no sentido positivo?

Primeiro que tudo, temos de saber de que trata a matemática. O platonista (em particular, o platonista lógico, como Frege ou Russell, inicialmente) diria que a matemática é sobre entidades ideais com existência objectiva, que uma certa faculdade intelectual nos permite apreender ou intuir directamente, do mesmo modo que os nossos cinco sentidos nos permitem apreender objectos físicos. Porém, poucos leitores modernos (e Lakatos certamente não) estão preparados para aceitar seriamente a existência objectiva, intemporal e não espacial de todas as entidades contidas na moderna teoria de conjuntos, já para não falar de teorias futuras ainda por revelar. O formalista, pelo contrário, afirma que a matemática não é sobre nada, a matemática apenas *é*. Uma fórmula matemática é só uma fórmula; acreditarmos que ela tem conteúdo é uma ilusão que não necessita de ser defendida ou justificada. Esta posição só é possível se nos esquecermos de que a matemática informal *é* matemática. A formalização é apenas uma possibilidade abstracta, que, na realidade, ninguém quereria ou conseguiria levar a cabo.

Lakatos afirma que a matemática informal é uma ciência na definição de Popper, que se desenvolve por um processo sucessivo de crítica e aperfeiçoamento das teorias e pelo avanço de novas teorias em competição (e *não* pelo modelo dedutivo da matemática formal). Contudo, nas ciências naturais, a doutrina de Popper depende da existência objectiva do mundo da Natureza. Afirmações espácio-temporais singulares, como «o voltímetro indica um valor de 3,2», fornecem os testes pelos quais as teorias científicas são criticadas e por vezes refutadas. Para utilizar a linguagem popperiana, estas «afirmações básicas» são os «potenciais falsificadores».

Se a matemática informal está em pé de igualdade com as ciências naturais, devemos encontrar os seus «objectos». Quais são os dados, as «afirmações básicas», do assunto em estudo que constituem falsificadores potenciais das teorias propostas pela matemática informal? Esta questão nem sequer é posta no livro *Proofs and Refutations;* no entanto, é a questão fundamental que tem de ser respondida, se queremos ir mais além na construção de uma epistemologia da falibilidade ou não dogmática da matemática.

Nunca saberemos se Lakatos poderia ter resolvido este problema. Depois de escrever *Proofs and Refutations*, afastou-se da filosofia da matemática. Tornou-se participante proeminente em controvérsias sobre a filosofia da ciência, envolvendo autores como Carnap, Popper, Thomas Kuhn, Polányi, Toulmin e Feyerabend. Não há dúvida de que tencionava



Descartes (1635) e Euler (1752) afirmaram que $V - E + F = 2$ para todos os poliedros. Imre Lakatos dedicou-se a estudar a comédia subsequente, na qual os matemáticos descobriam sucessivamente monstros poliédricos que invalidavam a teoria e, depois, tentavam consertar essa teoria. Será que já se disse a última palavra sobre este assunto?

V = número de vértices
E = número de arestas
F = número de faces

voltar à matemática; todavia, aquando da sua morte repentina, em Fevereiro de 1974, ainda não o tinha feito.

Pode encontrar-se uma resposta parcial num dos artigos do vol. 2 dos seus trabalhos coligidos postumamente. Este artigo, «*A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics?*»*, começa com uma impressionante lista de citações de cerca de uma dúzia de grandes matemáticos e lógicos, tanto logicistas como formalistas, todos demonstrando que se desistiu da procura dos fundamentos seguros. Todos concordam que não

*Um renascimento do empirismo na filosofia da matemática?

há razão para acreditarmos na matemática, a não ser pelo facto de que ela parece funcionar. Von Neumann diz que, pelo menos, não é pior do que a física moderna, na qual muitas pessoas acreditam. Depois de puxar o tapete aos seus opositores, mostrando que a sua visão «herética» não é contrária à dos círculos matemáticos, Lakatos prossegue, contrastando teorias «euclidianas», como as filosofias fundacionistas tradicionais da matemática, e teorias «quase-empiristas», que consideram a matemática intrinsecamente conjectural e falível. E recorda que a sua teoria é quase-empirista (não empirista pura e simples) porque os falsificadores potenciais, ou as afirmações básicas da matemática, ao contrário das da ciência natural, não são certamente afirmações espácio-temporais singulares (isto é, tais como «o voltímetro indica um valor de 3,2»). Dá a sua própria resposta em duas fases. Primeiro, para teorias matemáticas formalizadas, os falsificadores potenciais são teorias informais. Por outras palavras, se temos de decidir aceitar ou rejeitar um conjunto de axiomas propostos para a teoria de conjuntos, tomamos a nossa decisão de acordo com a capacidade do sistema formal de reproduzir ou verificar a teoria matemática informal que tínhamos em mente desde o início. É claro que Lakatos sabe que podemos igualmente decidir modificar a nossa teoria informal e que a decisão da via a seguir pode ser complexa e controversa.

Neste ponto, encara o problema principal. Quais são os «objectos» de teorias matemáticas *informais?* Quando falamos de números, triângulos, ou probabilidades, independentemente de quaisquer sistemas de axiomas e definições, sobre que tipo de entidades estamos a falar? Muitas são as respostas possíveis, algumas do tempo de Aristóteles e Platão, todas com dificuldades e longas histórias de tentativas para contornarem estas dificuldades. A posição falibilista deveria levar a uma nova crítica das velhas respostas, talvez a uma nova resposta, que traria a filosofia da matemática até ao lugar central da filosofia da ciência contemporânea. Contudo, Lakatos não estava disposto a arriscar de mais. Escreveu: «A resposta, muito provavelmente, não será monolítica. Estudos histórico-críticos cuidadosos conduzirão a uma solução sofisticada e complexa.» Um ponto de vista razoável, mas que desilude.

A introdução de *Proofs and Refutations* é um enorme ataque ao formalismo, que Lakatos define com a escola de pensamento:

> [...] que tende a identificar a matemática com a sua abstracção axiomática formal e a filosofia da matemática com a metamatemática.
>
> O formalismo distancia a história da matemática da filosofia da matemática [...]. O formalismo nega o estatuto de matemática à maioria das ideias que se considerava normalmente serem matemática e não esclarece nada em relação ao seu desenvolvimento [...].

> No actual quadro de domínio do formalismo, somos tentados a parafrasear Kant: a história da matemática, sem a orientação da filosofia, tornou-se cega, enquanto a filosofia da matemática, virando as costas aos fenómenos mais intrigantes da história da matemática, se tornou vazia [...]. A filosofia formalista da matemática tem raízes muito profundas. É o último elo numa longa cadeia de filosofias dogmáticas da matemática. Há mais de 2000 anos que existe uma controvérsia entre dogmáticos e cépticos. Neste grande debate, a matemática tem sido a fortaleza orgulhosa do dogmatismo [...]. É tempo de ser desafiada.

No entanto, Lakatos não afirmou que o seu trabalho fosse o desafio há muito esperado. Escreveu:

> O núcleo deste estudo irá desafiar o formalismo matemático, mas não desafiará directamente as posições mais recuadas do dogmatismo matemático. O seu modesto objectivo é contribuir para mostrar que a matemática informal, quase-empírica, não se desenvolve através do crescimento monótono do número de teoremas inquestionáveis estabelecidos, mas através do melhoramento incessante de palpites por especulação e crítica, através da lógica das demonstrações e refutações.

Lakatos tornou-se rapidamente uma importante figura internacional no campo da filosofia da ciência; contudo (à parte um resumo razoavelmente completo que apareceu na *Mathematical Reviews*), desconheço qualquer publicação de uma crítica ou resposta a *Proofs and Refutations* até este ser republicado postumamente, sob a forma de livro, pela Cambridge University Press em 1976.

A primeira crítica apareceu no próprio livro, sob a forma de notas de rodapé e comentários acrescentados pelos editores, John Worrall e Elie Zahar. Podemos encontrar os seus contributos nas pp. 56, 100, 138, 146 e em duas páginas (125 e 126) de diálogo novo. A crítica na p. 138 é a mais directa.

Nessa página Lakatos escreveu que, para revermos a filosofia não falibilista da matemática, «tínhamos de desistir da ideia de que a nossa intuição dedutiva por inferência é infalível».

Os editores comentam:

> Esta passagem parece-nos errada e não temos dúvidas de que Lakatos, que veio a ter a maior consideração pela lógica dedutiva formal, a teria modificado. A lógica de primeira ordem conseguiu uma caracterização da validade da inferência que (relativa à caracterização dos termos «lógicos» de uma linguagem), na realidade, torna a inferência válida num processo essencialmente infalível.

Esta mesma ideia é expressa nas outras notas e material suplementar. Lakatos «menospreza um pouco os sucessos dos «rigoristas» matemáticos». O objectivo de uma demonstração rigorosamente correcta *é* possível. «Não existe nenhum sentido sério em que essas demonstrações sejam falíveis.»

É evidente que os editores consideram muito importante corrigir Lakatos sempre que este questiona a existência de uma solução final para o problema do rigor matemático. Tendo em conta os seus comentários, o leitor menos atento pode muito bem acreditar que a prática matemática moderna alcançou um nível em que não há lugar para dúvidas na decisão sobre se uma demonstração é válida ou não. Eles afirmam que uma demonstração formal dedutiva moderna é infalível, pelo que a única fonte de dúvidas em relação às conclusões é a dúvida em relação à veracidade das premissas. Se considerarmos o teorema, não como uma afirmação das suas conclusões, mas como uma afirmação condicional, do tipo «se as hipóteses são verdadeiras, então, a conclusão é verdadeira», então, segundo Worrall e Zahar, os sucessos da lógica de primeira ordem tornam a veracidade da afirmação indubitável. Neste sentido, dizem, o falibilismo de Lakatos é incorrecto.

Na minha opinião, Lakatos está certo; Worrall e Zahar estão enganados. O mais surpreendente é que a sua objecção está enraizada no mesmo erro que Lakatos atacou tão veementemente na sua introdução — o erro de identificar a própria matemática (o que os matemáticos realmente fazem na vida real) com o seu modelo, ou representação, em metamatemática, ou, se preferirmos, em lógica de primeira ordem.

Worrall e Zahar afirmam que uma derivação formal em lógica de primeira ordem não é falível. Mas não esclarecem que essas derivações são actividades puramente hipotéticas (excepto para problemas «fictícios» que possam ser utilizados como exercícios numa disciplina lógica).

A situação real é a seguinte: por um lado, temos a matemática real, com demonstrações estabelecidas através «do consenso das pessoas qualificadas». Uma demonstração real não é verificável por uma máquina, nem mesmo por um matemático isento do contexto, independente da maneira de pensar da área particular da matemática em que a demonstração se insere. Mesmo para o «leitor qualificado» existem, normalmente, diferenças de opinião no que se refere a uma demonstração real (isto é, que seja apresentada oralmente ou por escrito) estar completa ou correcta. Estas dúvidas são resolvidas através da comunicação e de explicações, e nunca transcrevendo a demonstração em cálculo de primeira ordem. Quando uma demonstração é «aceite», os resultados são considerados verdadeiros (com grande probabilidade). Pode levar gera-

ções até ser detectado um erro numa demonstração. Se um teorema é muito conhecido e utilizado, se a sua demonstração é estudada frequentemente, se existem demonstrações alternativas, se tem aplicações e generalizações e é análogo a resultados conhecidos em áreas afins, então, é considerado como «de pedra e cal». Neste contexto, é claro, toda a aritmética e geometria euclidiana são de pedra e cal.

Por outro lado, e distinto da matemática real, temos a «metamatemática», ou «lógica de primeira ordem». Como actividade, é claro que faz parte da matemática; porém, o seu conteúdo retrata uma estrutura de demonstrações que é realmente infalível «em princípio».

É, assim, possível estudar matematicamente as consequências de uma capacidade imaginada para construir demonstrações infalíveis; podemos, por exemplo, encontrar variações construtivas das regras da demonstração e estudar quais são as consequências de tais variações.

Como é que a existência desta imagem da matemática afecta as nossas compreensão e prática da matemática real? Worrall e Zahar, na sua crítica de Lakatos, parecem querer dizer que o problema da falibidade em demonstrações reais (que é ao que se refere Lakatos) foi resolvido conclusivamente pela presença de uma noção de demonstração infalível na metamatemática. (Este termo de Hilbert é agora antiquado, se não mesmo obsoleto, para denominar a teoria da demonstração, mas é ainda conveniente nesta discussão para designar o estudo do modelo de sistemas formais da matemática.) Temos curiosidade em saber como é que eles justificariam tal afirmação.

Recentemente, um analista conhecido, ao almoçar com um grupo de colegas matemáticos, contou que, nos tempos em que era estudante, estando uma vez a ler o livro *Logic for Mathematicians*, de Paul Rosenbloom, o seu orientador principal (um analista muito conhecido) lhe disse que se desfizesse do livro. Disse qualquer coisa como «terás tempo para ler essas coisas quando fores demasiado velho e cansado para fazer matemática verdadeira». Os outros matemáticos, que ouviam a história, acharam graça a esta falta de abertura de espírito. Contudo, nenhum deles mostrou surpresa ou choque; de facto, concordaram que o velho professor tinha razão, uma vez que estudar lógica com certeza não ajudaria um analista e poderia até interferir com o seu trabalho.

Hoje em dia isto já não seria correcto, porque, sendo uma parte da matemática, a lógica apresenta teorias que podem servir de ferramentas ao analista ou algebrista, por exemplo, na análise não standard. No entanto, isso não é o mesmo que justificar demonstrações transcrevendo-as em fórmulas de lógica de primeira ordem.

O mais provável é que Worrall e Zahar dissessem que uma demonstração real é meramente uma demonstração formal abreviada ou incompleta. Tal parece plausível; porém, levanta várias dificuldades. Na prática matemática fazemos distinção entre uma demonstração completa (informal) e uma demonstração incompleta. (Numa demonstração informal completa, cada passo é convincente para o leitor a quem se destina.) Como demonstrações formais, *ambas* são incompletas. Deste modo, é difícil perceber o que significa afirmar que uma demonstração real da matemática é uma abreviação de uma derivação formal, já que o mesmo poderia ser dito de uma demonstração incompleta e inaceitável.

Porta-vozes do formalismo (para usar a expressão de Lakatos para pessoas como Zahar e Worrall das notas de rodapé) nunca explicam em que sentido é que sistemas formais são um modelo da matemática. Será no sentido normativo — a matemática *deveria* ser como um sistema formal? Ou será no sentido descritivo — a matemática *é* como um sistema formal?

Se formos guiados pela retórica encontrada nos prefácios de livros de lógica, então, a lógica não reclama qualquer papel normativo. Contenta-se em estudar o seu modelo da matemática, da mesma maneira que um físico teórico estuda a equação de onda como modelo para a propagação do som. A equação de onda é um assunto de estudo da matemática pura. Se quisermos relacionar este estudo com o fenómeno físico da propagação do som, necessitamos de regras de interpretação. Como é que observamos ou medimos, na realidade, as variáveis físicas descritas pela equação matemática? E depois, mais importante, qual é o acordo entre as nossas observações físicas e as nossas previsões teóricas? Quais as circunstâncias em que a equação de onda é uma descrição precisa da física?

Num artigo recente e muito interessante Solomon Feferman afirma que o objectivo da teoria lógica é «modelar o raciocínio de um matemático platonista idealizado ou de um matemático construtivista idealizado». Salienta que, embora seja, por vezes, utilizada a analogia entre o uso de sistemas formais pelos lógicos para estudarem o raciocínio matemático e o uso de equações diferenciais pelos físicos para estudarem problemas físicos, a analogia falha, uma vez que não existe nada de semelhante ao método experimental da física através do qual os modelos dos lógicos sejam testados contra a experiência.

Escreve: «Não possuímos tais testes para as teorias da lógica. É antes uma questão de discernimento pessoal avaliar como é que aqueles se ajustam à experiência. A acumulação de avaliações favoráveis por muitos indivíduos é, naturalmente, importante.

Não se fala de infalibilidade. Feferman continua: «Embora o significado do trabalho da lógica não seja, assim, conclusivo, espero convencer o leitor de que existem muitas coisas interessantes que já se conhecem ou estão a ser investigadas.» Refere-se a vários resultados do tipo: um sistema formal *A*, aparentemente mais fraco (tendo menos «lances permitidos» nas regras de inferência) do que um segundo sistema formal *B*, é, na realidade, tão forte como *B*. Por exemplo, se *A* é um «sistema formal construtivista» e *B* um outro que viola algumas das restrições construtivistas, conclui-se que o que quer que seja demonstrado em *B* será verdadeiro no sentido construtivista. (No entanto, a demonstração de tal resultado na lógica *não* seria uma demonstração construtivista. Será que um construtivista a acharia esclarecedora? Talvez o encorajasse, em alguns casos, a procurar uma demonstração construtivista para algo provado em *B*.)

Estas afirmações modestas da lógica não são com certeza controversas. O impacto de *Proofs and Refutations* é que apresenta uma imagem filosófica da matemática radicalmente diferente da imagem dada pela lógica e pela metamatemática. Mais do que isso, quando as duas imagens são colocadas lado a lado, não existem dúvidas sobre qual parece estar mais próxima da realidade.

Feferman escreve:

> O matemático, no seu trabalho, confia em intuições surpreendentemente vagas e avança em passos atabalhoados e intermitentes, com recuos frequentes. Claramente, a lógica, no nível em que está, não consegue apresentar um quadro directo nem do desenvolvimento histórico da matemática nem da experiência do dia-a-dia dos seus praticantes. É também evidente que a procura dos fundamentos últimos através de sistemas formais falhou, não chegando a quaisquer conclusões convincentes.

Feferman tem sérias reservas acerca do trabalho de Lakatos. Afirma que o esquema de provas e refutações de Lakatos não é adequado para explicar o desenvolvimento de todos os ramos da matemática. Outros princípios, como a ânsia de unificar os diversos tópicos, parecem fornecer uma melhor explicação para o desenvolvimento da teoria abstracta de grupos ou da topologia de conjuntos de pontos. Contudo, Lakatos não afirmava que tinha dado uma explicação completa e definitiva de como a matemática progride. O seu objectivo, declarado claramente na introdução, era mostrar a desadequação do formalismo, apresentando uma imagem alternativa, uma imagem da matemática viva e em desenvolvimento, e não fossilizada em axiomas formais.

Neste contexto, Feferman reconhece inteiramente os resultados conseguidos por Lakatos. Escreve Feferman:

> Muitos dos que estão interessados na prática, ensino e/ou história da matemática reagirão com grande simpatia ao programa de Lakatos. Este programa enquadra-se bem com o temperamento crítico e antiautoritário dos novos tempos. Pessoalmente, concordo substancialmente tanto com a sua abordagem geral como com a sua análise pormenorizada.

Este é um início razoável e encorajador. Faz-nos ter esperança num diálogo novo e esclarecedor que pode conduzir a progressos no problema fundamental, o problema da veracidade e do significado da matemática, o problema da natureza do conhecimento matemático.

NÃO COMPREENDEREMOS o que é um cubo se só pudermos visualizá-lo de um determinado ângulo. Ajudar-nos-á se pudermos vê-lo de ângulos diferentes. Ajudar-nos-á ainda mais se pudermos pegar nele, sentir os cantos e arestas, ver o que acontece quando o reviramos na mão. Ajudar-nos-á se construirmos um cubo, o montarmos em arame, ou o moldarmos em barro, ou o cortarmos em aço.

Podemos estudar um hipercubo através de imagens ou manuseando-o num sistema gráfico interactivo (v. «Intuição quadridimensional»). À medida que giramos o hipercubo e vemos como uma imagem se transforma na outra, aprendemos a pensar acerca de um hipercubo como um objecto único.

De modo análogo, a matemática também é uma coisa só. Acreditamos nas visões platonista, formalista e construtivista da matemática porque cada uma corresponde a uma determinada perspectiva, a uma visão de um certo ângulo ou a um exame com um instrumento de observação particular.

O nosso problema reside em compreendermos a essência, de modo a ajustarmos as visões parciais — cada uma das quais é errada por si só, apenas porque é incompleta e facciosa. Uma vez que são imagens da mesma coisa, elas são compatíveis. A sua aparente incompatibilidade deve-se ao facto de as encararmos com um preconceito inapropriado.

Por exemplo, as diferentes imagens de um hipercubo são mutuamente contraditórias se pensarmos nele como um objecto tridimensional. Num espaço a quatro dimensões as diversas projecções tridimensionais ajustam-se.

Ou, descendo um degrau, as diversas imagens bidimensionais de um cubo normal parecem imagens de dois objectos diferentes até desenvolvermos uma visão ou «intuição» tridimensional, que nos permite transformar um no outro.

Existem muitos modos diferentes de olharmos para a matemática. No século XX, a maior parte do que se escreveu sistematicamente sobre a matemática de um ponto de vista filosófico foi na tradição fundacionista.

Se perguntarmos o que é a matemática, é fácil tomarmos o modelo de sistemas formais como resposta; no entanto, não é difícil encontrar críticas a esse modelo por matemáticos que tenham bem a consciência de como ele se adequa mal à sua própria experiência prática. Porém, desde o tempo de Frege praticamente nenhum filósofo importante tem discutido a matemática em termos diferentes do fundacionismo, da lógica formal. A melhor panaceia é ser confrontado com um modelo totalmente diferente. Isso foi o que Lakatos nos deu em *Proofs and Refutations*.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

S. Feferman; I. Hacking; R. Hersh [1978]; I. Lakatos [1962], [1967], [1976], [1978].

8

Realidade matemática

Vamos debruçar-nos sobre alguns exemplos específicos de trabalho matemático e ver que lições filosóficas podemos retirar deles. Vamos descobrir que a actividade de investigação matemática *obriga* a um reconhecimento da objectividade da verdade matemática. O «platonismo» do matemático não é uma crença verdadeira no mito de Platão, apenas uma consciência da natureza refractária, da teimosia dos factos matemáticos. Estes são o que *são*, não o que *queremos* que sejam.

Simultaneamente, veremos que o nosso conhecimento destas verdades matemáticas é conseguido por vários métodos, heurísticos e «rigorosos». O método heurístico pode ser absolutamente convincente; o método rigoroso pode deixar-nos numa dúvida persistente.

A hipótese de Riemann

O nosso primeiro exemplo enquadra-se no ramo da matemática pura mais respeitado e incontroverso — a teoria de números.

Desta área vamos estudar o problema da distribuição dos números primos, que já apresentámos no capítulo 5. O que nos atrai neste problema é o facto de podermos *ver* o que está a passar-se muito antes de podermos demonstrá-lo. A tabela apresentada no capítulo 5, por exemplo (retirada do artigo de Zagier no *Math. Intelligencer* #0), mostra que, para

x menor do que 10 000 000 000, o número de primos menores ou iguais a x, quando multiplicado por log x, representa uma recta quase perfeita em função de x.

Quando somos confrontados com um facto desta natureza, é impossível não ficarmos impressionados com o peso do argumento. Exactamente como na teoria do conhecimento científico de Popper, formulamos uma «conjectura ousada» — muito precisa e informativa e, portanto, muito dificilmente verdadeira «por acidente». Depois sujeitamos esta conjectura ao teste — um cálculo numérico, em vez de uma experiência física. O teste não consegue refutar a conjectura. Deste modo, a conjectura fortalece-se muito — é como se ficasse provada, no sentido das ciências naturais, embora não de acordo com a matemática dedutiva.

Um trabalho mais refinado de investigação científica natural sobre os números primos apareceu num artigo de I. J. Good e R. F. Churchhouse em 1967. Eles estão interessados na função *zeta* de Riemann, que definimos e discutimos no capítulo 5. A hipótese de Riemann está relacionada com as «raízes» da função *zeta* — ou seja, os números complexos z onde a função *zeta* é igual a zero. Riemann conjecturou que todas as raízes teriam a parte real igual a $^1/_2$. Geometricamente, estão sobre a linha «parte real de $z = {}^1/_2$, ou seja, uma linha paralela ao eixo imaginário, e $^1/_2$ unidade à sua direita.

Esta conjectura de Riemann é, unanimemente, considerada *o mais importante problema por resolver* da matemática. Uma demonstração do «teorema dos números primos» depende do facto (que *foi* demonstrado) de todos os zeros se encontrarem algures entre o eixo imaginário e a recta $x = 1$. Demonstrar que estão todos exactamente sobre $x = {}^1/_2$ implicaria conclusões ainda mais precisas acerca da distribuição dos números primos. Foi um grande triunfo para G. H. Hardy demonstrar que existem infinitos zeros da função *zeta* sobre a recta $x = {}^1/_2$. Ainda não sabemos se estão todos lá.

Já foi verificado por cálculo que os primeiros 70 milhões de zeros complexos da função *zeta* estão sobre $x = {}^1/_2$. Porém, Good and Churchhouse dizem:

> [...] esta não é uma razão muito boa para crermos que a hipótese é verdadeira. Na teoria da função *zeta*, e no problema associado da distribuição dos números primos, o logaritmo iterado log log x aparece muitas vezes em fórmulas assintóticas, crescendo esta função extremamente devagar. O primeiro zero fora da linha $R(s) = {}^1/_2$, se existir, pode ter uma parte imaginária cujo logaritmo iterado seja tão grande, por exemplo 10, que nunca seja possível, na prática, encontrar este zero por cálculo.

(Se log log $x = 10$, então, x é aproximadamente $10^{10\,000}$.)

Se isto parecer um pouco estranho, eles dão outro exemplo de uma conjectura bem verificada — que se sabe ser verdadeira nos primeiros mil milhões de casos — e que Littlewood demonstrou ser eventualmente falsa. De qualquer modo, Good e Churchhouse dizem que o objectivo do seu trabalho consiste em sugerirem uma «razão» (as aspas são deles) para acreditarmos na hipótese de Riemann.

O seu trabalho envolve algo denominado *função de Möbius,* que se representa por $\mu(x)$ (pronuncia-se «miu de x»). Para calcularmos $\mu(x)$, factorizamos x nos respectivos factores primos. Se houver um factor repetido, como em $12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ou em $25 = 5 \cdot 5$, então $\mu(x)$ toma o valor 0. Se todos os factores forem distintos, contam-se. Se houver um número par de factores, definimos $\mu(x) = 1$; se houver um número ímpar, tomamos $\mu(x) = -1$. Por exemplo, $6 = 2 \cdot 3$ tem um número par de factores; logo $\mu(6) = 1$. Por outro lado, $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, pelo que $\mu(70) = -1$.

Somam-se então os valores de $\mu(n)$ para todos os n menores ou iguais a N. Esta soma de $+1$ e -1 é uma função de N, denominada $M(N)$. Está demonstrado há muito tempo que a conjectura de Riemann é equivalente à seguinte conjectura: $M(N)$ não cresce mais depressa do que uma constante multiplicada por $N^{1/2+\epsilon}$ quando N tende para o infinito (onde ϵ é arbitrário, mas maior do que 0). Qualquer das conjecturas implica a outra; ainda nenhuma foi demonstrada.

Good e Churchhouse dão uma «boa razão» para acreditarmos na hipótese de Riemann dando uma «boa razão» (não uma demonstração!) que indica que $M(N)$ cresce de acordo com aquele critério.

A «boa razão» que apresentam corresponde a raciocinar sobre os valores da função de Möbius como se fossem variáveis aleatórias.

Porque é uma boa razão? A função de Möbius é completamente determinista; uma vez escolhido n, não existe nenhuma ambiguidade em relação aos seus factores primos — se tem factores repetidos ou não e, neste caso, se o número de factores é par ou ímpar.

Por outro lado, se fizermos uma tabela dos valores da função de Möbius, ela «parece» aleatória, no sentido de que é aparentemente caótica, sem nenhum padrão ou regularidades discerníveis, excepto pelo facto de μ ter a «mesma probabilidade» de ser $+1$ ou -1.

Qual é a probabilidade de n não ter factores repetidos, ou seja, de $\mu(n) \neq 0$? Tal sucederá se n não for múltiplo de 4, ou de 9, ou de 25, ou do quadrado de qualquer outro número primo. A probabilidade de um número escolhido ao acaso não ser múltiplo de 4 é de $^3/_4$, a probabilidade de não ser múltiplo de 9 é de $^8/_9$, a probabilidade de não ser múltiplo de 25 é de $^{24}/_{25}$, e assim por diante. Mais ainda, estas condições

são todas independentes — saber que n não é um múltiplo de 4 não nos diz nada sobre o facto de n ser ou não múltiplo de 9. De acordo com a lei básica das probabilidades, a probabilidade de ocorrência de dois acontecimentos independentes é o produto das suas probabilidades separadas; logo, concluímos que a probabilidade de $\mu(n) \neq 0$ é o produto

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdots$$

Embora este produto tenha um número infinito de factores, pode ser calculado analiticamente, sendo o seu resultado $6/\pi^2$.

Assim, a probabilidade de $\mu(n) = 1$ é $3/\pi^2$ e a probabilidade de $\mu(n) = -1$ é a mesma. O «valor esperado» de μ é, naturalmente, zero; em média, os $+1$ e os -1 devem anular-se.

Suponhamos que escolhemos um grande número de inteiros aleatória e independentemente. Então, para cada uma dessas escolhas teríamos $\mu = 0$ com a probabilidade $1 - 6/\pi^2$, $\mu = 1$ com a probabilidade $3/\pi^2$ e $\mu = -1$ com probabilidade $3/\pi^2$. Se adicionássemos todos os valores de μ, obteríamos um número que poderia ser muito grande, no caso de a maioria das nossas escolhas ter $\mu = 1$. Por outro lado, seria pouco provável obter $\mu = 1$ muito mais vezes do que $\mu = -1$. Na realidade, um teorema da teoria de probabilidades (desigualdade de Hausdorff) afirma que, se escolhermos N números deste modo, então, com a probabilidade 1, a soma não cresce mais depressa do que uma constante vezes $N^{1/2+\epsilon}$ quando N tende para o infinito.

Esta conclusão é exactamente aquilo de que necessitamos para demonstrarmos a conjectura de Riemann! No entanto, trocámos os termos do nosso somatório. Na conjectura de Riemann, temos de somar os valores de μ para os números de 1 a N. Em vez disso, escolhemos os N números de modo aleatório.

O que justifica esta troca? Ela é justificada pelo nosso sentimento ou impressão de que a tabela de valores de μ é «caótica», «aleatória», «imprevisível». Segundo este raciocínio, os primeiros N valores de μ não são especiais, são apenas N números aleatórios.

Se aceitarmos esta argumentação, então, concluiremos que a hipótese de Riemann é verdadeira *com probabilidade um*. Esta conclusão parece ao mesmo tempo aliciante e sem sentido: aliciante, devido ao modo espantoso como o raciocínio probabilístico fornece precisamente a taxa de crescimento necessária para $M(N)$; sem sentido, porque a veracidade da hipótese de Riemann não é com certeza uma variável aleatória, que é verificada só «com probabilidade um».

O autor do importante trabalho sobre a função *zeta*, H. M. Edwards, chama a este tipo de raciocínio heurístico «bastante absurdo». (Edwards não se refere ao trabalho de Good e Churchhouse, mas a um artigo de Denjoy, de 1931, que utiliza argumentos probabilísticos semelhantes, mas menos pormenorizados.)

Para confirmarem o seu raciocínio probabilístico, Good e Churchhouse realizaram algum trabalho numérico. Tabularam os valores da soma de $\mu(n)$ para n em intervalos de comprimento 1000. E encontraram confirmações estatísticas excelentes para o seu modelo aleatório.

Num cálculo independente verificaram que o número total de zeros de $\mu(n)$ para n entre 0 e 33 000 000 é 12 938 407. O «número esperado» é $33\,000\,000 \times (1 - 6/\pi^2)$, ou seja, 12 938 405,6. Consideram este resultado «um ajuste impressionantemente próximo, melhor do que merecíamos». Um argumento não rigoroso previu um resultado matemático com 8 dígitos de precisão.

Em física ou química, um acordo entre a experiência e a teoria com uma precisão de 8 dígitos seria considerado uma confirmação muito forte da teoria. Aqui também é impossível crer que tal acordo é acidental. O princípio que possibilitou os cálculos *tem de* estar certo.

Quando reagimos desta maneira às evidências heurísticas, estamos de algum modo empenhados na filosofia realista ou platonista. Estamos a afirmar que a regularidade prevista e confirmada não é uma ilusão — existe *ali alguma coisa* regular e que obedece a uma lei.

É fácil inventar um exemplo de uma sequência de afirmações verdadeiras para $n = 1, 2$, até 1 000 000 000 000, e falsa a partir daí (por exemplo, «n não é divisível por 2^{12} e 5^{12} simultaneamente»). Por isso, o facto de uma conjectura sobre os números naturais ser verdadeira para os primeiros 2 000 000 000 casos certamente não prova que ela seja ainda verdadeira para o caso 2 000 000 001. Contudo, para conjecturas como aquelas acerca da distribuição dos números primos, ninguém acredita que o comportamento que observamos na nossa amostra se altere súbita e radicalmente noutra amostra de valores mais elevados.

Só com alguma confiança na ordem ou «racionalidade» do sistema de números é possível realizar investigação bem sucedida. «Deus é subtil, mas não malicioso», como disse Einstein. Esta fé, de que um físico necessita para acreditar que consegue compreender o universo, também é necessária para um matemático que tenta compreender o seu universo mental de números e formas. Talvez seja a isto que Dieudonné se refere quando diz que o realismo é «conveniente». É mais do que conveniente; é indispensável.

O ponto importante em toda esta discussão é que ela não faz nenhum sentido de um ponto de vista construtivista *ou* formalista. O construtivista afirma que a hipótese de Riemann só se torna verdadeira ou falsa quando for dada, num caso ou no outro, uma demonstração construtivista. Não tem nenhum sentido discutir se *já* é verdadeira ou falsa, independentemente de qualquer demonstração. O formalista afirma que a hipótese de Riemann mais não é do que uma conjectura em relação a uma afirmação que pode ser deduzida de determinados axiomas. Uma vez mais não se aceita a veracidade ou a falsidade na matemática sem demonstração a favor ou contra.

Será interessante perguntarmo-nos, neste contexto, por que motivo ainda sentimos a necessidade de uma demonstração, ou que convicção ganharemos, se tivermos uma demonstração com 200 ou 300 páginas, cheias de cálculos difíceis, onde até o mais persistente pode perder-se.

Parece evidente que queremos uma demonstração porque estamos convencidos de que todas as propriedades dos números naturais *podem* ser deduzidas de um único conjunto de axiomas; se algo é verdadeiro, mas *não conseguimos* deduzi-lo deste modo, é sinal de falta de compreensão da nossa parte. Por outras palavras, acreditamos que uma demonstração seria um modo de compreendermos a razão *pela qual* é verdadeira a conjectura de Riemann, o que é algo mais do que apenas saber, a partir de um raciocínio heurístico convincente, que ela *é* verdadeira.

No entanto, uma demonstração tão complexa e não intuitiva que não clarificasse o assunto não cumpriria este objectivo.

Porque queremos ainda uma demonstração, mesmo uma demasiado complexa e não intuitiva? Suponha-se que se publicava uma demonstração com 500 páginas. Como se decidia se a demonstração estava correcta? Suponha-se que era decidido por um número suficiente de peritos que, de facto, estava correcta. Ficaríamos entusiasmados porque sabíamos agora, em definitivo, que a conjectura de Riemann é verdadeira?

Talvez exista, no entanto, um outro objectivo para a demonstração — como um campo de testes para a persistência e o engenho do matemático. Admiramos o conquistador do Evereste, não porque o topo do Evereste seja um lugar onde queiramos estar, mas porque é muito difícil lá chegar.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. Edwardds; I. J. Good e R. F. Churchhouse; E. Grosswald; M. Kac; G. Pólya [1954]; D. Zagier.

π e $\hat{\pi}$

Vemos que na teoria dos números pode haver indícios heurísticos tão fortes que nos transmitem convicção, mesmo sem demonstração rigorosa. Este é um fenómeno da experiência matemática que a filosofia tem de tratar. É verdade que a teoria dos números não é típica neste aspecto.

Na maioria das áreas da matemática, tratamos de objectos muito mais complicados do que na teoria dos números. É muitas vezes difícil ou impossível testar uma conjectura em exemplos concretos. Pode até ser um grande sucesso exibir um único exemplo, não trivial, da estrutura em consideração; ou a afirmação que queremos demonstrar pode ser de natureza tal que é difícil ou impossível verificar por cálculos, mesmo em exemplos particulares. Este seria o caso, por exemplo, na teoria dos conjuntos e na análise funcional.

Mesmo assim, até nestas áreas, a premissa de uma realidade objectiva acerca da qual procuramos estabelecer a verdade é inevitável para o investigador ou para o estudante.

Em vez de expormos o caso através de um exemplo de um dos campos mais abstractos, vamos apresentar um exemplo famoso de Brouwer. Está relacionado com a «lei da tricotomia» para o sistema de números reais: qualquer número real é positivo, negativo ou zero. Brouwer afirmou que o seu exemplo é um *contra-exemplo* para a lei da tricotomia, apresentando um número real que não é positivo, nem negativo, nem zero. A maioria dos matemáticos rejeita violentamente a conclusão de Brouwer. O número dele, dizem tais matemáticos, *é* zero, ou negativo, ou positivo. Nós é que, pura e simplesmente, não sabemos o que é.

Ao apresentarmos o exemplo, vamos também pormenorizar um pouco mais a nossa exposição do construtivismo. Porém, o nosso motivo principal é realçar ainda mais o pensamento platonista subjacente à própria estrutura do sistema dos números reais, tal como este é compreendido pelo matemático normal (não construtivista). Uma vez que é difícil pensar em qualquer ramo da matemática que não dependa, de modo crucial, dos números reais, mostraremos que o platonismo está intimamente associado à prática matemática dos dias de hoje.

Para estudarmos o contra-exemplo de Brouwer, começaremos com π e usaremos a sua expansão decimal para definir um segundo número real, relacionado, que denominaremos $\hat{\pi}$ (ler: «pi-chapéu»). A nossa definição de $\hat{\pi}$ envolve uma grande arbitrariedade — existem muitas outras construções que dariam o mesmo resultado essencial. Em vez de π, poderíamos começar com $\sqrt{2}$ ou qualquer outro número irracional familiar.

Apenas é necessário que (1) tal como com π, tenhamos um processo de cálculo definido («algoritmo») que dê a expansão decimal com os termos que quisermos e (2) exista alguma propriedade desta expansão decimal — por exemplo, o aparecimento de 100 zeros seguidos — que, pelo que sabemos, seja «acidental». O mesmo é dizer que não sabemos se esta propriedade é excluída ou exigida pela definição de π. Para determinarmos se na expansão de π aparecem 100 zeros seguidos não existe nenhum método, excepto gerar realmente essa expansão e inspecioná-la. Até agora ainda não foram encontrados esses 100 zeros seguidos. Se calculássemos os primeiros mil milhões de dígitos e encontrássemos os 100 zeros, então, é claro que a questão ficava resolvida (se tivéssemos confiança total na correcção do cálculo). Por outro lado, se não encontrássemos os 100 zeros nessa expansão, não teríamos aprendido nada; nada sabemos acerca dos segundos mil milhões de dígitos. Mesmo que houvesse uma sequência de 100 zeros na nossa expansão, podíamos alterar a questão para (por exemplo) 1000 noves seguidos e ainda ter uma questão em aberto. O que é

PI = 3.+

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128	4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196
4428810975	6659334461	2847564823	3786783165	2712019091	4564856692	3460348610	4543266482	1339360726	0249141273
7245870066	0631558817	4881520920	9628292540	9171536436	7892590360	0113305305	4882046652	1384146951	9415116094
3305727036	5759591953	0921861173	8193261179	3105118548	0744623799	6274956735	1885752724	8912279381	8301194912
9833673362	4406566430	8602139494	6395224737	1907021798	6094370277	0539217176	2931767523	8467481846	7669405132
0005681271	4526356082	7785771342	7577896091	7363717872	1468440901	2249534301	4654958537	1050792279	6892589235
4201995611	2129021960	8640344181	5981362977	4771309960	5187072113	4999999837	2978049951	0597317328	1609631859
5024459455	3469083026	4252230825	3344685035	2619311881	7101000313	7838752886	5875332083	8142061717	7669147303
5982534904	2875546873	1159562863	8823537875	9375195778	1857780532	1712268066	1300192787	6611195909	2164201989
3809525720	1065485863	2788659361	5338182796	8230301952	0353018529	6899577362	2599413891	2497217752	8347913151
5574857242	4541506959	5082953311	6861727855	8890750983	8175463746	4939319255	0604009277	0167113900	9848824012
8583616035	6370766010	4710181942	9555961989	4676783744	9448255379	7747268471	0404753464	6208046684	2590694912
9331367702	8989152104	7521620569	6602405803	8150193511	2533824300	3558764024	7496473263	9141992726	0426992279
6782354781	6360093417	2164121992	4586315030	2861829745	5570674983	8505494588	5869269956	9092721079	7509302955
3211653449	8720275596	0236480665	4991198818	3479775356	6369807426	5425278625	5181841757	4672890977	7727938000
8164706001	6145249192	1732172147	7235014144	1973568548	1613611573	5255213347	5741849468	4385233239	0739414333
4547762416	8625189835	6948556209	9219222184	2725502542	5688767179	0494601653	4668049886	2723279178	6085784383
8279679766	8145410095	3883786360	9506800642	2512520511	7392984896	0841284886	2694560424	1965285022	2106611863
0674427862	2039194945	0471237137	8696095636	4371917287	4677646575	7396241389	0865832645	9958133904	7802759009
9465764078	9512694683	9835259570	9825822620	5224894077	2671947826	8482601476	9909026401	3639443745	5305068203
4962524517	4939965143	1429809190	6592509372	2169646151	5709858387	4105978859	5977297549	8930161753	9284681382
6868386894	2774155991	8559252459	5395943104	9972524680	8459872736	4469584865	3836736222	6260991246	0805124388
4390451244	1365497627	8079771569	1435997700	1296160894	4169486855	5848406353	4220722258	2848864815	8456028506
0168427394	5226746767	8895252138	5225499546	6672782398	6456596116	3548862305	7745649803	5593634568	1743241125
1507606947	9451096596	0940252288	7971089314	5669136867	2287489405	6010150330	8617928680	9208747609	1782493858
9009714909	6759852613	6554978189	3129784821	6829989487	2265880485	7564014270	4775551323	7964145152	3746234364
5428584447	9526586782	1051141354	7357395231	1342716610	2135969536	2314429524	8493718711	0145765403	5902799344
0374200731	0578539062	1983874478	0847848968	3321445713	8687519435	0643021845	3191048481	0053706146	8067491927
8191197939	9520614196	6342875444	0643745123	7181921799	9839101591	9561814675	1426912397	4894090718	6494231961
5679452080	9514655022	5231603881	9301420937	6213785595	6638937787	0830390697	9207734672	2182562599	6615014215
0306803844	7734549202	6054146659	2520149744	2850732518	6660021324	3408819071	0486331734	6496514539	0579626856
1005508106	6587969981	6357473638	4052571459	1028970641	4011097120	6280439039	7595156771	5770042033	7869936007
2305587631	7635942187	3125147120	5329281918	2618612586	7321579198	4148488291	6447060957	5270695722	0917567116
7229109816	9091528017	3506712748	5832228718	3520935396	5725121083	5791513698	8209144421	0067510334	6711031412
6711136990	8658516398	3150197016	5151168517	1437657618	3515565088	4909989859	9823873455	2833163550	7647918535
8932261854	8963213293	3089857064	2046752590	7091548141	6549859461	6371802709	8199430992	4488957571	2828905923
2332609729	9712084433	5732654893	8239119325	9746366730	5836041428	1388303203	8249037589	8524374417	0291327656
1809377344	4030707469	2112019130	2033038019	7621101100	4492932151	6084244485	9637669838	9522868478	3123552658
2131449576	8572624334	4189303968	6426243410	7732269780	2807318915	4411010446	8232527162	0105265227	2111660396
6655730925	4711055785	3763466820	6531098965	2691862056	4769312570	5863566201	8558100729	3606598764	8611791045
3348850346	1136576867	5324944166	8039626579	7877185560	8455296541	2665408530	6143444318	5867697514	5661406800
7002378776	5913440171	2749470420	5622305389	9456131407	1127000407	8547332699	3908145466	4645880797	2708266830
6343285878	5698305235	8089330657	5740679545	7163775254	2021149557	6158140025	0126228594	1302164715	5097925923
0990796547	3761255176	5675135751	7829666454	7791745011	2996148903	0463994713	2962107340	4375189573	5961458901
9389713111	7904297828	5647503203	1986915140	2870808599	0480109412	1472213179	4764777262	2414254854	5403321571
8530614228	8137585043	0633217518	2979866223	7172159160	7716692547	4873898665	4949450114	6540628433	6639379003
9769265672	1463853067	3609657120	9180763832	7166416274	8888007869	2560290228	4721040317	2118608204	1900042296
6171196377	9213375751	1495950156	6049631862	9472654736	4252308177	0367515906	7350235072	8354056704	0386743513
6222247715	8915049530	9844489333	0963408780	7693259939	7805419341	4473774418	4263129860	8099888687	4132604721

π com 5000 casas decimais (de Daniel Shanks e John W. Wrench, Jr.)

Cortesia: *Mathematics of Computation,* vol. XVI, n.º 7, Janeiro de 1962

importante é que existem, e sempre existirão, questões simples acerca do π, tal como estas, para as quais nunca esperamos encontrar uma resposta.

Seja P a afirmação «na expansão decimal de π aparece, eventualmente, uma sequência de 100 zeros seguidos». Seja $\overline{P}$ «na expansão decimal de π nunca aparece uma sequência de 100 zeros sucessivos». Será verdadeira a proposição «P ou a $\overline{P}$»?

A maioria dos matemáticos responderia *sim.* De facto, a «lei do terceiro excluído» exige um *sim;* estamos simplesmente a perguntar se P é verdadeiro ou falso, e a lei do terceiro excluído afirma que todas as proposições são verdadeiras ou falsas.

O construtivista discorda. Argumenta que a lei do terceiro excluído não se aplica neste caso, pois vê «a expansão de π» como um animal mitológico. Acreditarmos que P ou $\overline{P}$ é verdadeiro resulta da concepção enganadora de que a expansão de π *já existe* como um objecto completo. Isso, porém, é falso. Tudo o que existe, ou que sabemos construir, corresponde a uma parte finita dessa expansão.

O argumento pode parecer um pouco teológico. O que interessa realmente?

Na verdade, interessa. Para o matemático desistir da sua crença platónica na existência da expansão de π, ou na veracidade de P ou $\overline{P}$, seria necessária uma reconstrução de toda a análise matemática. Isto é ilustrado pelo exemplo da lei da tricotomia. Definimos um número $\hat{\pi}$ através de uma regra segundo a qual os primeiros 1000, o primeiro milhão ou os primeiros cem mil milhões de dígitos da expansão decimal de $\hat{\pi}$ devem ser calculados. É tudo o que é necessário para «definir» um número real.

$\hat{\pi}$ será muito semelhante a π. Na verdade, *é* igual a π nas primeiras 100, nas primeiras 1000, mesmo nas primeiras 10 000 casas decimais. A nossa regra é a seguinte: expandir π até encontrarmos 100 zeros sucessivos (ou até ultrapassarmos a precisão desejada para $\hat{\pi}$, conforme o que ocorrer primeiro). Até este primeiro conjunto de 100 zeros, a expansão de $\hat{\pi}$ é idêntica à de π. Suponhamos que o primeiro zero desse conjunto ocorre no n-ésimo dígito. Se n for ímpar, então $\hat{\pi}$ terminará no seu n-ésimo dígito. Se n for par, então $\hat{\pi}$ terá um 1 no dígito $n + 1$ e terminará.

É importante reparar que neste momento desconhecemos, e provavelmente nunca saberemos, *se esse número n existe.* Se nunca descobrirmos uma sequência de 100 zeros sucessivos em π, então, nunca encontraremos um valor para n. Mesmo assim a nossa receita para construir $\hat{\pi}$ é perfeitamente definida; conhecemo-lo com tantas casas decimais como as de π. Sabemos também que $\hat{\pi} = \pi$ se, e só se, π não contiver nenhuma sequência de 100 zeros. Se π tiver uma tal sequência e ela começar num

número par da expansão, então $\hat{\pi}$ será maior do que π. Se começar num número ímpar, então $\hat{\pi}$ será menor do que π.

Vamos agora calcular, não π, mas a diferença $\hat{\pi} - \pi$. Representemos a diferença por Q. Será Q positivo, negativo ou zero?

Se tentarmos encontrar a resposta utilizando um computador para calcular a expansão de π, não a saberemos até encontrarmos uma sequência de 100 zeros sucessivos. Se o computador trabalhar durante 1000 anos e não encontrar os 100 zeros, continuaremos sem saber se Q é positivo, negativo ou zero. Além disso, não teremos nenhuma razão para pensar que fizemos progressos; continuaremos tão longe da resposta como quando começámos.

Numa situação destas qual o significado da lei básica da matemática usual, a denominada «lei da tricotomia» — «qualquer número é zero, positivo ou negativo»? Afirmamos claramente que Q *é* positivo, ou negativo, ou zero, *independentemente* do facto de nunca podermos saber a resposta. A lei da tricotomia, tomada à letra, afirma que uma dessas três proposições *tem* de ser verdadeira, não interessando se existe um modo, ainda que em princípio, para determinar qual delas.

A ideia dos construtivistas é a de que nenhuma das três é verdadeira. Q será zero, positivo ou negativo apenas quando alguém determinar qual das proposições realmente se verifica; até lá, nenhuma delas é verdadeira. Deste modo, a verdade matemática é dependente do tempo e é *subjectiva,* embora não dependa da consciência de nenhum matemático em particular.

O ponto principal da sua crítica é que nenhuma conclusão baseada na proposição composta «$Q > 0$, ou $Q = 0$, ou $Q < 0$» é justificada. Generalizando, qualquer conclusão baseada num raciocínio sobre um conjunto infinito é errada se assentar no princípio de que todas as afirmações são verdadeiras ou falsas — a lei do terceiro excluído. Como o exemplo demonstra, na óptica construtivista, uma afirmação pode não ser verdadeira nem falsa. Quer isto dizer que ninguém tem hipóteses de mostrar que é verdadeira ou falsa.

O matemático usual não acha o argumento convincente, antes o acha um aborrecimento. Não tem a mínima intenção de desistir da lei da tricotomia em favor de uma versão mais precisa que pudesse ser demonstrada construtivamente. Porém, também não quer reconhecer que a sua prática e o seu ensino da matemática dependem de uma ontologia platonista. Não defende nem rejeita o seu platonismo. Adopta a estratégia da avestruz — finge que não aconteceu nada.

Em anos recentes, foi desenvolvido um grande esforço para reconstruir a análise segundo o programa construtivista por Erret Bishop, muito conhecido por trabalhos importantes no âmbito da análise clássica antes

de se dedicar ao construtivismo. Bishop atraiu uma pequena legião de seguidores. Argumenta, como o fez Brouwer, que muita da matemática usual é um jogo sem sentido; porém, vai mais longe do que Brouwer, mostrando através de exemplos como podemos refazê-la de um modo construtivista.

A maior parte dos matemáticos reage a este trabalho com indiferença ou hostilidade. A maioria não construtivista devia ser capaz de fazer melhor. Devíamos ser capazes de expor a nossa própria filosofia tão claramente como os construtivistas expõem a deles. Temos o direito de preferir o nosso ponto de vista; contudo, há que reconhecer honestamente qual é.

A ideia de construtivismo apresentada aqui é a convencional, dada do ponto de vista da matemática clássica ou usual.

Isto significa que é inaceitável do ponto de vista do construtivista. Do seu ponto de vista, a matemática clássica é um emaranhado de mito e realidade. Ele prefere rejeitar o mito. Para ele, a matemática clássica é que é uma aberração; o construtivismo é apenas a recusa em participar da aceitação de um mito.

Gabriel Stolzenberg escreveu uma análise cuidadosa de como os pressupostos implícitos do matemático clássico lhe tornam o ponto de vista construtivista incompreensível. Esse artigo destina-se a leitores interessados em filosofia e não exige qualquer preparação matemática.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

E. Bishop [1967]; N. Kopell e G. Stolzenberg; G. Stolzenberg.

Modelos matemáticos, computadores e platonismo

No exemplo seguinte analisamos uma situação muito típica, quase padrão em matemática aplicada.

Um matemático está interessado na solução de uma determinada equação diferencial. Sabe que a solução $u(t)$ «existe», porque o seu problema está abrangido pelos «teoremas de existência» usuais para equações diferenciais.

Sabendo que a solução existe, tenta descobrir o máximo que puder sobre ela. Suponhamos, por exemplo, que o teorema geral afirma que a função $u(t)$ existe e é única para todo o $t \geq 0$. O objectivo do matemático consiste em tabelar a função $u(t)$ com a precisão possível, especialmente

para t próximo de zero e para t muito grande (ou, como ele diria, perto do infinito).

Para t próximo de zero utiliza uma coisa denominada «série de Taylor». Ele conhece uma demonstração rigorosa (para t pequeno) da convergência da série para a solução da equação. Porém, não tem nenhum modo de saber quantos termos da série são necessários para conseguir a precisão que deseja — por exemplo, com erro inferior a $\frac{1}{1\,000\,000}$. Vai adicionando termos até verificar que a soma não se altera ao juntar mais termos. Aí pára. É guiado pelo senso comum e não pela lógica rigorosa. Não pode demonstrar que os termos desprezados, de maior ordem, são de facto desprezáveis. Por outro lado, tem de parar em algum ponto. Deste modo, não tendo uma demonstração rigorosa, usa um argumento plausível para tomar a decisão.

Para t intermédio — nem muito pequeno, nem muito grande — calcula $u(t)$ recursivamente, substituindo a equação diferencial por uma sucessão de equações algébricas. Tem muita confiança na precisão do resultado porque está a utilizar o programa de resolução de equações diferenciais mais avançado de todos os que existem. O programa foi aperfeiçoado e testado durante muitos anos e é utilizado em laboratórios científicos de todo o mundo. Porém, não existe qualquer prova lógica rigorosa de que os números que obtém são correctos. Primeiro que tudo, não há garantias de que o algoritmo computacional que constitui o cerne do programa funcione para todos os casos — apenas em todos os casos «razoáveis». Ou seja, a demonstração que justifica a utilização do algoritmo parte do princípio de que a solução tem certas propriedades desejáveis, que se verificam «normalmente» nos «problemas que geralmente aparecem». Contudo, nada *garante* que assim seja. O que se passa se aparecer um caso anormal? Este problema manifesta-se quando os cálculos param anormalmente. Os números «explodem» — ficam demasiado grandes para o programa — e o programa pára, avisando o operador. Qualquer pessoa suficientemente esperta consegue, sem dúvida, imaginar uma equação diferencial para a qual este programa particular forneceria soluções aparentemente razoáveis, mas erradas.

Mais ainda, mesmo que se demonstrasse que o algoritmo era aplicável no nosso caso, o cálculo real envolve tanto *software* como *hardware*. Por *software* entendemos o programa do computador e todo o complexo sistema de controle programado, que permite escrever os nossos programas em dez páginas em vez de mil. Por *hardware* entendemos a própria máquina, os transístores, memória, fios, etc.

Software é também um tipo de matemática. Pode exigir-se uma demonstração rigorosa de que o *software* faz, o que é suposto fazer. Existe

uma área em desenvolvimento em ciência da computação para encontrar «demonstrações dos programas». Como é fácil imaginar, é muito mais complexo e longo produzir a demonstração da correcção do programa do que escrever o próprio programa. No caso dos enormes compiladores muito disseminados na programação científica, não existem perspectivas para o aparecimento de demonstrações de correcção; se alguma vez aparecerem, será difícil imaginar quem as lerá e verificará a *sua* correcção. Entretanto, os compiladores são utilizados sem hesitação. Porquê? Porque foram desenvolvidos por pessoas que fizeram o seu melhor para que funcionassem correctamente; porque estão em uso há muitos anos e admite-se que já houve tempo para detectar e corrigir a maioria dos erros. Tem-se a esperança de que os que ainda existem sejam inofensivos. Se quisermos ser particularmente cuidadosos, podemos fazer os cálculos duas vezes, usando dois sistemas diferentes, em duas máquinas diferentes.

Normalmente o *hardware* funciona correctamente; supõe-se que é de grande confiança e que a probabilidade de falha pode ser desprezada (*não* é zero!). É claro que existem muitas peças e é possível que algumas falhem. Se tal acontecer e o cálculo for afectado, espera-se que um mau comportamento tão grosseiro seja detectado e o computador, reparado. No entanto, tudo isto é apenas uma questão de probabilidades, não de certezas.

Finalmente, o que se passa com a função $u(t)$ para t elevado, «perto do infinito»? Calculando recursivamente com uma máquina, podemos ir até um valor elevado de t, mas, por muito elevado que seja, será ainda finito. Para finalizar o estudo de $u(t)$, fazendo t tender para o infinto, é muitas vezes possível usar métodos especiais de cálculo, os chamados «métodos assintóticos», cuja precisão aumenta à medida que t cresce. Às vezes estes métodos podem ser justificados rigorosamente; porém, são muitas vezes utilizados sem demonstração rigorosa, com base em experiência geral e com um olho nos resultados, para ver se estes «parecem razoáveis».

Se for possível utilizar dois métodos diferentes de cálculo assintótico e os resultados concordarem, estes resultados são considerados quase conclusivos, mesmo que nenhum deles tenha sido demonstrado rigorosamente de um ponto de vista matemático.

Do ponto de vista do formalista (do nosso imaginário formalista estrito e radical), todo este processo não tem o mínimo sentido. Pelo menos não é matemática, embora talvez possa ser justificado se lhe chamarmos carpintaria ou canalização. Uma vez que não há axiomas nem teoremas, só há «cálculos cegos» baseados em argumentos parciais e fragmentários, o nosso formalista, se for coerente com a sua filosofia, só pode sorrir com desdém para o trabalho tolo e sem sentido da dita matemática aplicada.

(Temos de ter cuidado com a armadilha verbal causada pelo duplo sentido da palavra *formalismo.* No contexto da própria matemática, formalismo refere-se, muitas vezes, aos cálculos efectuados sem estimar erros ou sem demonstrações de convergência. Neste caso, os métodos numéricos e assintóticos usados na matemática aplicada são formais. Porém, num contexto filosófico, formalismo refere-se à redução da matemática a deduções formais dos axiomas, sem ter em conta o significado.)

Filosoficamente, o matemático aplicado é um platonista não crítico. Admite como certo que *existe* uma função $u(t)$ e que tem o direito de utilizar todo e qualquer método que lhe permita conhecer melhor essa função. Ficaria confuso se lhe pedissem para explicar *onde* é que ela existe ou *como* existe, mas sabe que aquilo que faz tem sentido. Tem uma coerência interna e uma interligação com muitos aspectos da matemática e da engenharia. Se a função $u(t)$ que tenta calcular, por qualquer método, *não* existe *a priori* e independentemente dos seus cálculos, então, todo o seu esforço para a calcular é uma futilidade sem sentido; é como tentar fotografar o ectoplasma numa sessão espírita.

Em muitos casos, a equação diferencial, cuja solução tenta calcular, é proposta como um modelo de alguma situação física. É então claro que o teste fundamental da sua utilidade ou validade é o seu valor para prever ou explicar o problema físico. Assim, temos de comparar estas duas entidades, *cada uma das quais tem as suas propriedades objectivas* — o modelo matemático, correspondente, no nosso exemplo, à equação diferencial, e o modelo físico.

O modelo físico *não* corresponde exactamente a um objecto físico real, algo observável num tempo e local particulares. É uma idealização ou simplificação. Em qualquer altura e local específicos existem infinitos tipos de observações e de medidas que podem ser pedidos. O que ocorre numa altura e num tempo particulares pode sempre ser distinguido do que ocorre noutra altura. Para desenvolver uma *teoria,* uma compreensão com alguma generalidade, o físico selecciona algumas características determinadas — as «variáveis de estado» — e utiliza-as para representar o objecto físico real, infinitamente complexo. Deste modo, cria um modelo físico — algo que já é uma simplificação da realidade física. Este *modelo físico,* sendo parte de uma teoria física, obedece, em princípio, a algumas leis matemáticas. Estas leis ou equações especificam alguns objectos matemáticos, as soluções das equações matemáticas — e estas são o modelo matemático. Muitas vezes o primeiro *modelo matemático* que se elabora é demasiado complicado para fornecer informação útil e, assim, introduzem-se certas simplificações, «desprezando termos pequenos nas equações», obtendo um modelo matemático simplificado, que se

espera (às vezes até pode demonstrar-se!) que seja, em certo sentido, próximo do modelo matemático original.

De qualquer modo, tem de se decidir se o *modelo matemático* representa uma descrição aceitável do *modelo físico*. Para o fazer, *cada um* tem de ser estudado, como uma realidade distinta com as suas propriedades. O estudo do modelo matemático é feito, como referimos, com matemática rigorosa até onde for possível, com matemática não rigorosa ou formal até onde for possível e com vários tipos de cálculo — simulações, discretizações, truncaturas.

O modelo físico pode ser estudado em laboratório, se for possível desenvolvê-lo em condições laboratoriais. Ou, se existir na Natureza alguma sua aproximação — no plasma interplanetário ou nas profundezas do Atlântico —, pode ser estudado onde quer que esteja melhor representado. Ou pode ser simulado por um computador, se imaginarmos que conseguimos transmitir à máquina o suficiente acerca de como se comportaria o nosso modelo físico. Neste caso, estamos a comparar dois modelos matemáticos diferentes.

O que importa realçar é que a suposição platónica de que o nosso modelo matemático é um objecto bem definido parece essencial se queremos que todo o programa da matemática aplicada tenha algum sentido.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

R. DeMillo, R. Lipton e A. J. Perlis; F. Brooks, Jr.

Porque devo acreditar num computador?

Em 1976 aconteceu uma coisa rara: a notícia da demonstração de um teorema da matemática pura foi publicada nas colunas do *The New York Times*. A ocasião foi a demonstração, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da «conjectura das quatro cores». O acontecimento foi notícia por duas razões. Em primeiro lugar, o problema era famoso. A conjectura das quatro cores era estudada há mais de cem anos. Muitas haviam sido as tentativas falhadas para a resolver — agora, por fim, tinha sido demonstrada. Contudo, o próprio método de demonstração era digno de nota. Isto porque uma parte essencial da demonstração consistia em cálculos por computador. Ou seja, a demonstração publicada continha programas de computadores e resultados de cálculos desses programas. Os passos intermédios, de execução dos programas, não foram, é claro, publicados; neste

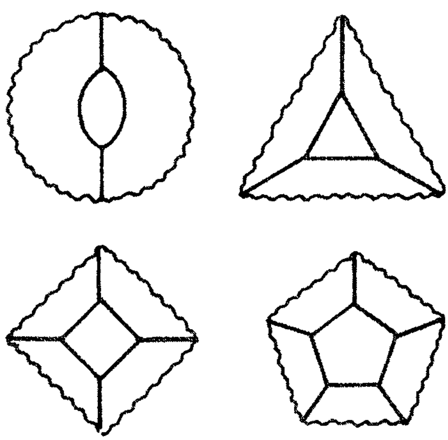
sentido, as demonstrações publicadas estavam em *princípio e permanentemente* incompletas.

O problema das quatro cores consiste em demonstrar que qualquer mapa, numa superfície plana ou numa esfera, pode ser colorido sem utilizar mais de quatro cores. A única exigência é a de que quaisquer dois países com uma fronteira comum não tenham a mesma cor. Se dois países se encontram apenas num ponto (como o Utah e o Novo México, nos Estados Unidos), podem ter a mesma cor. Os países podem ter qualquer formato, mas cada país tem de consistir num só território conexo.

O facto de quatro cores serem suficientes deve ter sido notado há muito tempo; foi apresentada pela primeira vez uma conjectura matemática por Francis Guthrie em 1852. Em 1878, o eminente matemático britânico Arthur Cayley propôs este problema à London Mathematical Society e, passado um ano, Arthur Bray Kempe, advogado de Londres e membro da London Mathematical Society, publicou um artigo, no qual afirmava ter demonstrado a conjectura.

Kempe tentou usar o método de redução ao absurdo. Para explicar o argumento, é suficiente considerarmos mapas «normais». Um mapa normal é aquele em que nunca se encontram mais de três regiões em qualquer ponto e nenhuma região engloba outra. Qualquer mapa pode ser associado com um mapa normal, que requer pelo menos o mesmo número de cores; é assim suficiente demonstrar a conjectura das quatro cores para mapas normais.

Kempe demonstrou, correctamente, que em qualquer mapa normal existe, pelo menos, uma região com cinco ou menos vizinhos. Isso significa que uma destas quatro configurações tem de aparecer em qualquer mapa normal:



Estes quatro diagramas representam os quatro casos possíveis de uma região com 2, 3, 4 ou 5 vizinhos. O facto de, pelo menos, uma destas configurações aparecer de certeza é descrito afirmando que este conjunto de configurações é inevitável.

Kempe tentou mostrar como, em cada caso, se pode construir um novo mapa, com menos países, que seria de novo colorido com cinco cores. Se pudermos realizar esta construção, diremos que a configuração dada é redutível. Deste modo, a ideia de Kempe consiste em apresentar um conjunto *inevitável* de configurações *redutíveis*. Se tal for possível, a redução ao absurdo é imediata, pois poderíamos concluir que, dado qualquer mapa com cinco cores, é possível construir a partir dele um outro com cinco cores e menos regiões. Com um número finito de passos, obteríamos um mapa com cinco cores e menos de cinco regiões, o que é certamente um absurdo.

Infelizmente, o argumento da redutibilidade de Kempe estava incorrecto no caso de uma região com cinco vizinhos. O erro foi descoberto em 1890 por P. J. Heawood. De 1890 a 1976, a conjectura das quatro cores foi um dos mais importantes problemas matemáticos em aberto.

A demonstração de Appel e Haken acabou por utilizar de novo a ideia de um conjunto inevitável de configurações redutíveis. Contudo, em vez das quatro configurações simples de Kempe, o conjunto inevitável continha milhares de configurações, a maioria das quais tão complicadas que provar que eram reduzíveis só foi possível utilizando um supercomputador.

O uso do computador nesta situação é, em princípio, muito diferente das utilizações referidas em matemática aplicada e em teoria de números.

Na matemática aplicada, o computador serve para calcular uma resposta aproximada quando a teoria não consegue dar a resposta exacta. Podemos tentar utilizar a teoria para verificar se a resposta calculada está, de algum modo, próxima da resposta exacta. Porém, a teoria não depende de modo algum do computador para alcançar as suas conclusões; pelo contrário, os dois métodos, teórico e mecânico, são como duas visões independentes do mesmo objecto; o problema é coordená-los.

No estudo da distribuição de primos ou problemas semelhantes da teoria de números, o computador serve para gerar dados. Estudando estes dados, o matemático pode conseguir formar uma conjectura, como o teorema dos números primos. É claro que ele gostaria de demonstrar a conjectura, mas, sendo impossível, pode pelo menos *verificá-la,* utilizando de novo o computador para gerar uma outra amostra do sistema de números naturais, para ver se o resultado previsto pela sua conjectura se mantém.

Em ambos os casos, a matemática rigorosa da demonstração não está contaminada pela máquina. No primeiro caso, o da matemática aplicada, a máquina permanece em segundo plano, um substituto a ser utilizado em áreas a que a teoria não chega. No segundo caso, o da teoria dos números, a máquina é uma ajuda heurística, que pode ajudar-nos a decidir em que devemos acreditar, e mesmo com que confiança acreditar, mas de qualquer modo não afecta o que é *demonstrado*.

No teorema das quatro cores de Haken-Appel a situação é totalmente diferente. Eles apresentam o seu trabalho como uma demonstração definitiva, completa e rigorosa. Por esse motivo, a resposta complexa e controversa que receberam dá-nos uma perspectiva pouco vulgar daquilo que filósofos e matemáticos imaginam que é o conceito de demonstração rigorosa.

No *Journal of Philosophy* de Fevereiro de 1979, Stephen Tymoczko considerou as ramificações filosóficas do trabalho de Haken e Appel como se segue:

> Se aceitamos o teorema das quatro cores como um teorema, então, somos obrigados a mudar a ideia de «teorema», ou, mais precisamente, a mudar a ideia do conceito de «demonstração» que lhe está subjacente.

Do ponto de vista do filósofo, a utilização de um computador como parte essencial da demonstração envolve um enfraquecimento dos padrões de demonstração matemática. O computador introduz razões para cepticismo e, assim, modifica na essência a situação que anteriormente se supunha envolver conclusões acima de qualquer dúvida e sem *quaisquer* motivos para cepticismo em nenhuma altura.

Appel e Haken escreveram:

> Uma pessoa poderia verificar cuidadosamente a parte dos resultados do processo que não envolve a redutibilidade num ou dois meses. No entanto, não parece concebível verificar os cálculos da redutibilidade à mão. Na realidade, os *referees* do nosso artigo usaram as nossas notas completas para verificar os primeiros resultados, mas recorreram a um programa de computador independente para verificar a correcção dos cálculos da redutibilidade.

Assim, não se nega que a aceitação do teorema de Haken-Appel comporte um certo acto de fé. Mesmo que lesse e verificasse cada linha que eles escreveram, teria ainda de acreditar que os cálculos por computador fazem aquilo que devem fazer. A minha aceitação da demonstração do teorema das quatro cores depende não só da minha confiança na minha

própria capacidade de compreender e verificar raciocínios matemáticos, mas também do facto de acreditar que os computadores trabalham e fazem o que é suposto. Isto é uma convicção totalmente diferente. Não tenho maiores razões para essa convicção do que para acreditar na realidade e fiabilidade do «senso comum» — coisas que toda a gente sabe e em que acredito porque aceito «aquilo que toda a gente sabe».

Desta maneira, o conhecimento matemático é reduzido ao nível do senso comum. Porém, o senso comum não pretende basear-se na demonstração rigorosa ou ter a certeza do raciocínio dedutivo como justificação. Por isso, confiar num computador, como se faz na demonstração de Haken-Appel, significa sacrificar um aspecto essencial da certeza matemática, degradando-a até ao nível do conhecimento vulgar, que é passível de um certo cepticismo, do qual o conhecimento matemático sempre esteve livre. Esta é a crítica do filósofo.

No entanto, o matemático encara o assunto de um modo totalmente diferente. Se pertencer ao grupo dos poucos matemáticos que apreciam os computadores, que se interessam e podem admirar a arte necessária para pegar no teorema das quatro cores e o pôr num computador — então para ele o teorema de Haken-Appel será uma inspiração e um triunfo. Contudo, para a maioria dos matemáticos a resposta é bem diferente. Quando ouvi dizer que o teorema das quatro cores tinha sido demonstrado, a minha primeira reacção foi: «Maravilhoso! Como fizeram?» Esperava algum caminho novo e brilhante, uma demonstração que contivesse na base uma ideia cuja beleza transformaria o meu dia. Quando recebi a resposta, «fizeram-no dividindo o teorema em milhares de casos e verificando-os no computador, um por um», senti-me desmoralizado. A minha reacção foi: «Isso mostra que, afinal, não era um bom problema.»

A reacção é certamente uma questão de gosto. Nesta matéria, o meu gosto é, provavelmente, antiquado. Uma geração futura de matemáticos poderá encontrar prazer estético em demonstrações por computador, tal como a primeira conseguida por D. H. Lehmer e agora transportada para voos mais altos por Haken e Appel. Porém, este tipo de questão está ligado ao facto de gostarmos ou não dessas demonstrações, ao facto de obtermos ou não a visão, o prazer, a satisfação ou seja o que for que pensemos que uma boa demonstração deve dar.

A objecção do filósofo é bastante diferente. Parece-lhe que ocorre uma degradação do grau de certeza que viola a natureza da matemática, como ele a compreende.

Para o matemático, a objecção do filósofo é estranhamente ingénua e idealista, com a conotação negativa de imatura e louca.

Na realidade, numa entrevista a um jornal o professor Haken é citado como negando especificamente que o uso do computador por ele e por Appel envolva qualquer modificação do conceito de demonstração matemática:

> Qualquer pessoa pode, em qualquer altura, preocupar-se com os pormenores e verificá-los. O facto de o computador poder, em algumas horas, verificar mais pormenores do que um ser humano conseguiria durante toda a vida não altera o conceito básico de demonstração matemática. O que mudou não foi a teoria, mas a prática da matemática.

Para o filósofo, uma demonstração que dependa da fiabilidade de uma máquina é completamente diferente de uma demonstração que dependa exclusivamente do raciocínio humano. Para o matemático, a fiabilidade do raciocínio é um facto da vida tão familiar que ele aceita o computador como mais fiável a executar cálculos do que ele alguma vez poderia sê-lo.

Num artigo que descreve o seu trabalho, Appel e Haken escreveram:

> A maioria dos matemáticos que foram formados antes do aparecimento de computadores rápidos tende a não os encarar como uma ferramenta de rotina, a ser usada em conjunto com outras ferramentas mais antigas e teóricas com o objectivo de fazer progredir o conhecimento matemático. Logo sente, intuitivamente, que, se um argumento contém passos que não são verificáveis à mão, assenta em bases inseguras. Existe uma tendência para considerar que a verificação de resultados computacionais por outros programas de computador independentes não é tão certa como a verificação independente, à mão, de teoremas demonstrados do modo usual.
>
> Este ponto de vista é razoável para teoremas cujas demonstrações tenham uma extensão média e sejam muito teóricos. Quando as demonstrações são compridas e exigem muitos cálculos, é discutível se, mesmo que seja possível a verificação manual, a probabilidade de erro humano não é consideravelmente maior do que a da máquina.

A probabilidade de erro humano está presente mesmo antes de utilizarmos o computador! Apenas podemos tentar minimizá-la. Se uma demonstração é suficientemente grande e complicada, existem sempre algumas possibilidades de dúvida quanto à sua correcção. A utilização do computador não elimina o erro humano, pois o computador é um objecto feito pelo homem.

Num artigo publicado na revista *Acta Mathematica* em 1971 e citado por Yuri I. Manin no texto *Introduction to Mathematical Logic,* H. P. F. Swinnerton-Dyer usou um computador para calcular os valores de uma

certa determinante que aparece no estudo de formas lineares homogéneas: Swinnerton-Dyer fez os seguintes comentários:

> Quando um teorema é demonstrado com a ajuda de um computador, é impossível apresentar a argumentação de um modo que possa submeter-se ao teste tradicional — que um leitor suficientemente paciente consiga estudar a demonstração e verificar que está correcta. Mesmo que se imprimissem todos os programas e todos os conjuntos de dados utilizados (que, neste caso, ocupariam cerca de 40 páginas muito aborrecidas), não seria possível ter a certeza de que a fita perfurada não foi mal furada ou mal lida. Pior ainda: todos os computadores modernos têm falhas obscuras no *software* e no *hardware* — que só provocam erros tão raramente que não são detectadas durante anos — e qualquer computador está sujeito a falhas temporárias. Esses erros são raros; todavia alguns, provavelmente, ocorreram no decurso dos cálculos aqui apresentados.

Quer isto dizer que devem rejeitar-se os resultados da computação? De maneira nenhuma. E continua:

> No entanto, na prática, o cálculo consiste em procurar um número muito pequeno de agulhas num palheiro com seis dimensões: a maioria dos cálculos refere-se a zonas do palheiro que, de facto, não contêm agulhas e o erro nessas zonas não afectará o resultado final. Apesar das possibilidades de erro, penso que é quase certo que a lista de $\Delta \leq 17$ admissíveis está completa; e é inconcebível que uma infinidade de $\Delta \leq 17$ admissíveis tenha passado despercebida.

A sua conclusão:

> De qualquer modo, a única maneira de verificar estes resultados (se se pensasse que valia a pena) é atacando o problema independentemente, com uma máquina diferente. Isto corresponde exactamente à situação da maioria das ciências experimentais.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

K. Appel e W. Haken; Y. I. Manin; T. Tymoczko.

Classificação de grupos finitos simples

Vamos concentrar-nos agora num outro ramo em desenvolvimento da matemática moderna, no qual o significado de *demonstrado* parece ser

um pouco diferente do habitual em textos de lógica. É a teoria de grupos finitos simples (v. capítulo 5). A classificação de grupos finitos simples é um problema importante da álgebra, no qual têm sido feitos progressos impressionantes nos últimos anos. Dois aspectos tornaram este assunto particularmente interessante para matemáticos não especialistas. Um destes intrigantes aspectos é a série de descobertas de «monstros», grupos simples cuja existência era totalmente desconhecida até 1966, quando Z. Janko descobriu o primeiro deles, lançando assim a moderna teoria dos grupos esporádicos. «A existência destes estranhos objectos, descobertos à razão de um por ano, revelou a riqueza do assunto e conferiu um ar de mistério à natureza dos grupos simples.» (Daniel Gorenstein, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Janeiro de 1979.)

O grupo descoberto por Janko tem 175 560 elementos. Foi seguido por mais duas dúzias; os nomes dos matemáticos que os descobriram e o tamanho dos grupos vêm no artigo de Gorenstein. O maior da lista é o «monstro de Fischer», que tem a ordem $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot$ $\cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ (aproximadamente 8×10^{53}).

Na realidade, quando o artigo de Gorenstein foi publicado, ainda não se tinha demonstrado a existência deste grupo. Contudo, dizia-se que havia «indicações esmagadoras» a favor da sua existência.

Os investigadores de grupos finitos simples acreditam que praticamente já acabaram o trabalho de classificação de todos os grupos finitos simples. Os problemas metodológicos que apareceram neste trabalho são notavelmente semelhantes aos discutidos por Swinnerton-Dyer em relação aos seus cálculos por computador, a que já nos referimos:

> Neste momento, a determinação de todos os grupos finitos simples está quase completa. Tal afirmação é, obviamente, uma presunção, se não for desprovida de sentido, já que não se fala de teoremas como estando «quase demonstrados». Todavia, o último teorema, que estabelecerá a classificação dos grupos simples, é diferente de todos os outros da história da matemática; a demonstração completa, quando for alcançada, terá pelo menos 5000 páginas! Mais ainda: é muito provável que já existam cerca de 80% destas páginas em publicação ou pré-publicação.
>
> — D. Gorenstein

Para Swinnerton-Dyer, o teste tradicional de uma demonstração era que um leitor suficientemente paciente pudesse estudá-la e verificar a sua correcção. Quando o tamanho da demonstração chega a milhares de páginas, torna-se difícil encontrar um leitor tão paciente. Temos de nos contentar com uma equipa de leitores pacientes e esperar que não escape

nenhum erro devido a problemas de comunicação entre os membros da equipa.

Contudo, não é apenas o tamanho da demonstração que dá origem a problemas. Há que ter em conta a exactidão da demonstração:

> Esta é a altura certa para acrescentar uma palavra de precaução acerca do significado de «demonstração» neste contexto, pois parece que a apresentação de um raciocínio de centenas de páginas com exactidão absoluta ultrapassa a capacidade humana. Não falo de erros tipográficos inevitáveis ou dos conceitos gerais que servem de base à demonstração, mas de argumentos «locais», que não estão totalmente certos — um engano, uma falha. Quase sempre podem ser corrigidos imediatamente; porém, a existência desses erros «temporários» é, no mínimo, desconcertante. Na realidade, levantam a seguinte questão básica: para começar, se os argumentos são muitas vezes *ad hoc,* como é que podemos garantir que a «peneira» não deixou escapar uma configuração que dá origem a mais um grupo simples? Infelizmente, não há garantias — temos de viver com esta realidade. No entanto, sente-se que, havendo tantas pessoas a trabalhar em grupos simples nos últimos quinze anos e de tantas perspectivas diferentes, todas as configurações de interesse aparecerão vezes suficientes para não passarem despercebidas por muito tempo. Por outro lado, existe claramente uma grande necessidade de um exame contínuo das «demonstrações» existentes. Tal será especialmente verdade no dia em que se anunciar a classificação final dos grupos simples e o êxodo, que já começou, para terrenos mais férteis se acentuar. Alguns dos mais fiéis terão de ficar para melhorar o «texto». Esta será uma das grandes tarefas da era «pós-classificação».
>
> — D. Gorenstein

Na demonstração «à mão», assim como na por computador, temos de viver com a realidade dos erros de raciocínio. De qualquer modo, em ambos os casos existe a sensação, baseada numa visão global do problema, de que as demonstrações incompletas ou erróneas dão a resposta correcta.

Se o programa descrito por Gorenstein for executado e os resultados forem aceites como válidos ou conclusivos pela comunidade matemática, onde é que há diferenças em relação à aceitação de demonstrações por computador, como a do teorema das quatro cores?

Quando uma demonstração tem 5000 páginas e é coligida pelo contributo de vários matemáticos, é evidente que a afirmação de terem demonstrado o teorema se baseia, em grande parte, na confiança mútua na competência e integridade de cada um, e a aceitação desse trabalho por toda a comunidade matemática é baseada, em grande parte, na sua confiança nos membros da equipa.

Esta confiança mútua deve-se à confiança em instituições sociais e compromissos da profissão matemática. A aceitação da demonstração por computador do teorema das quatro cores baseia-se na confiança em que os computadores trabalham como é suposto que o façam. Em ambos os casos, a confiança é razoável e tem razão de ser. Em ambos os casos, existe espaço para alguma dúvida e alguma possibilidade de erro.

O teorema das quatro cores parece excepcional devido à utilização de computadores. A classificação dos grupos finitos simples parece excepcional devido ao tamanho das suas demonstrações. Contudo, não é possível traçar uma linha definida que separe estes exemplos das demonstrações e dos teoremas típicos publicados todos os meses em revistas de matemática.

Matemáticos de todas as áreas confiam no trabalho dos outros, citam-se uns aos outros; a confiança mútua que lhes permite fazê-lo baseia-se na confiança no sistema social do qual fazem parte. Não se limitam a utilizar resultados que consigam demonstrar por si a partir de primeiros princípios. Se um teorema foi publicado numa revista respeitável, se o nome do autor nos é familiar, se o teorema foi citado e usado por outros matemáticos, então, considera-se que está estabelecido. Quem necessitar de o utilizar fá-lo-á à vontade.

Esta confiança mútua é perfeitamente razoável e apropriada; todavia, viola, com certeza, a noção de verdade matemática indubitável.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

J. Alper; F. Budden; D. Gorenstein.

Intuição

A palavra *intuição,* usada pelos matemáticos, tem uma grande carga de mistério e ambiguidade. Por vezes, parece ser uma substituta perigosa e ilegítima para demonstração rigorosa. Noutros contextos, parece indicar uma luz inexplicável de visão, através da qual alguns felizardos adquirem conhecimento matemático que outros só conseguem alcançar com grande esforço.

Como primeiro passo para explorar a importância deste conceito, será proveitoso tentar fazer uma lista dos vários significados e usos que damos a esta palavra:

1) Intuitivo é o oposto de rigoroso. Esta utilização não é totalmente clara, pois o significado de «rigoroso» nunca é explicitado. Podemos dizer que, neste contexto, intuitivo significa pouco rigoroso

e, no entanto, o conceito de rigor é definido intuitivamente, em vez de rigorosamente.

2) Intuitivo significa visual. Assim, topologia ou geometria intuitivas diferem da topologia ou geometria rigorosas em dois aspectos. Por um lado, a versão intuitiva tem um significado, uma referência no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que é excluído da versão rigorosa (isto é, formal ou abstracta). Neste aspecto, a intuitiva é superior; tem uma qualidade que falta à versão rigorosa. Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerarmos óbvias ou evidentes afirmações que são dúbias ou mesmo falsas (o artigo de Hahn «The crises in intuition» dá uma bela colecção de exemplos dessas frases).
3) Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração. Um significado relacionado é «o que podemos esperar que seja verdadeiro neste género de situação com base na experiência geral de situações semelhantes ou assuntos relacionados». «Intuitivamente plausível» significa «uma conjectura razoável», ou seja, um candidato a demonstração.
4) Intuitivo significa incompleto. Se trocarmos o limite com o sinal de integral sem usarmos o teorema de Lebesgue, se representarmos uma função através de uma série de potências sem verificarmos que a função é analítica, então, a falha lógica é reconhecida, designando o argumento por intuitivo.
5) Intuitivo significa confiarmos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes. Neste sentido, é quase o mesmo que heurístico.
6) Intuitivo significa holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico. Quando pensamos numa teoria matemática como um todo, quando vemos que determinada afirmação deve ser verdadeira devido ao modo como se ajustaria a tudo o resto que sabemos acerca dela, estamos a raciocinar «intuitivamente». Para sermos rigorosos, temos de justificar a nossa conclusão dedutivamente, através de uma cadeia de raciocínio, na qual cada passo possa ser defendido das críticas e o primeiro passo seja considerado conhecido e o último passo, o resultado desejado.

Se a cadeia de raciocínio for extremamente longa e complicada, a demonstração rigorosa pode deixar o leitor com dúvidas e desconfianças; pode ser genuinamente menos convincente do que um argumento intuitivo, que pode ser compreendido como um todo e assumir, implicitamente, que a matemática é coerente e razoável.

Em todos estes usos a noção de intuição permanece um pouco vaga; o seu aspecto muda um pouco de uso. No prefácio de um livro, um autor pode orgulhar-se de evitar o «meramente» intuitivo — ou seja, o uso de figuras e diagramas como auxiliares das demonstrações. Outro autor pode orgulhar-se de dar enfâse ao intuitivo — ou seja, de comunicar o significado visual e físico de um teorema matemático ou de apresentar uma demonstração heurística de um teorema, e não apenas a verificação formal *post hoc*.

Com qualquer destas interpretações, o intuitivo é, até certo ponto, estranho e não essencial. Pode ser desejável — talvez fosse melhor dizer que tem os seus aspectos desejáveis e não desejáveis — e autores diferentes podem discordar quanto à importância a atribuir ao intuitivo nos seus textos — em qualquer dos casos é opcional, como o molho na salada. Talvez seja estouvado e derrotista, mas um professor pode ensinar matemática e um investigador pode escrever artigos sem prestar atenção ao problema da intuição. No entanto, se não trabalharmos em matemática, mas tentarmos olhar para os matemáticos e compreender o que fazem, então, o problema da intuição torna-se central e inevitável.

Nós afirmamos que:

1) Todos os pontos de vista filosóficos usuais assentam de modo essencial em alguma noção de intuição.
2) Nenhum desses programas filosóficos tenta sequer explicar a natureza e significado da intuição que postula.
3) O estudo da intuição, como é utilizada actualmente, leva a uma noção difícil e complexa, mas não inexplicável e impossível de analisar. Uma análise realista da intuição matemática é um objectivo razoável e deveria ser uma das características centrais de uma filosofia da matemática adequada.

Vamos desenvolver cada um destes três pontos. As três filosofias principais a que nos referimos são o construtivismo, o platonismo ou realismo e o formalismo de um tipo ou outro. Nesta discussão, não necessitamos de fazer distinções minuciosas entre as várias versões possíveis de platonismo, formalismo e construtivismo. Será suficiente caracterizar cada ponto de vista grosseiramente com uma única frase. Assim, o construtivista encara os números naturais como o dado fundamental da matemática, que não exige nem é passível de redução a qualquer noção mais básica e a partir da qual todas as noções matemáticas têm de ser construídas.

O platonista encara os objectos matemáticos, não como coisas construídas pelos seres humanos, mas como coisas que já existem, de uma vez

por todas, num sentido ideal e intemporal (ou «sem passado, presente ou futuro»). Não criamos, apenas descobrimos o que já existe, incluindo infinidades de qualquer grau de complexidade já concebidas ou a conceber pelas mentes dos matemáticos.

Finalmente, o formalista não aceita nem as restrições do construtivista nem a teologia do platonista. Para ele, só interessam as regras do jogo — as regras de inferência através das quais transformamos uma fórmula na outra. Qualquer «significado» que essas fórmulas tenham é «não matemático» e irrelevante.

De que é que cada uma destas três filosofias necessita da intuição?

A dificuldade mais óbvia é a que afecta o platonismo. Se os objectos matemáticos constituem um mundo ideal não material, como é que a mente humana contacta com este mundo? Pensemos na hipótese do contínuo. Tendo em conta as descobertas de Gödel e Cohen, sabemos que não se pode demonstrar a sua veracidade ou falsidade partindo de qualquer sistema de axiomas pelo qual os conjuntos infinitos são descritos na matemática contemporânea.

O platonista acredita que esta situação é apenas uma indicação da nossa ignorância. O contínuo é algo definido, existindo independentemente da mente humana; tem ou não um subconjunto infinito que não é equivalente nem ao conjunto dos inteiros nem ao conjunto dos reais. A nossa intuição tem de ser desenvolvida até podermos dizer qual das duas hipóteses é a verdadeira.

Deste modo, o platonista necessita da intuição para estabelecer a ligação entre a compreensão humana e a realidade matemática. Todavia, esta intuição é algo muito ilusório. O platonista não tenta descrevê-la, muito menos analisar a sua natureza. Como se adquire intuição matemática? Evidentemente, tal varia de pessoa para pessoa, até de um génio matemático para outro, tem de ser desenvolvida e refinada, uma vez que no presente parece inadequada. Então, através de quem, segundo que critério, a treinamos ou desenvolvemos?

Estaremos a falar de uma faculdade mental que nos permite apreender directamente uma realidade ideal, tal como os nossos sentidos físicos apreendem a realidade física? Nesse caso, a intuição torna-se uma segunda entidade ideal, o contraponto ao nível subjectivo da realidade matemática ideal ao nível objectivo. Temos agora dois mistérios, em vez de um, não só o mistério da relação entre a realidade ideal das ideias intemporais e a realidade mundana da mudança e fluxo, mas também o mistério da relação entre o matemático físico, que nasce e morre nesse mundo de mudança e fluxo, e a sua faculdade intuitiva, que alcança directamente a realidade escondida do intemporal e eterno.

Estes problemas fazem do platonismo uma doutrina difícil de defender por qualquer pessoa com orientação científica.

Os matemáticos platonistas não os tentam discutir. Não conseguem analisar a noção de intuição matemática, porque a sua posição filosófica transforma a intuição numa faculdade indispensável, mas impossível de analisar. A intuição é para o platonista o mesmo que a «alma» é para os crentes na vida depois da morte: sabemos que existe, mas não podem ser feitas perguntas acerca dela.

A posição do construtivista é diferente. Ele é, conscientemente, descendente de Kant e sabe exactamente como se apoia na intuição. Aceita (intuitivamente) como dadas as noções de construtivo e dos números naturais — ou seja, a noção de uma operação que pode ser iterada, que pode sempre ser repetida mais uma vez. Isto não parece ser muito problemático e poucas pessoas discutiriam acerca disto. No entanto, parece que, entre os seguidores de Brouwer, tem existido algum desacordo, diferenças de opinião sobre qual o caminho a seguir ou qual a maneira certa de ser construtivista. É claro que isto já era aguardado; todas as escolas filosóficas têm a mesma experiência. Contudo, origina uma certa dificuldade para uma escola que afirma basear-se apenas numa intuição universal e inconfundível. O dogma de que a intuição do sistema de números naturais é universal não é sustentável à luz da experiência histórica, pedagógica ou antropológica. O sistema de números naturais parece uma intuição inata apenas para matemáticos tão sofisticados que não recordam, nem conseguem imaginar, a época anterior à aquisição dessa intuição e tão isolados que nunca têm de comunicar seriamente com as pessoas (ainda, sem dúvida, a maior parte da raça humana) que não interiorizaram este conjunto de ideias e as tornaram intuitivas.

E o formalista? O problema da intuição não desaparece juntamente com o problema do significado e da veracidade? Na realidade, podemos evitar pensar sobre a intuição enquanto definimos a matemática como sendo apenas deduções formais a partir de teoremas formais. Como escreveu A. Lichnerowicz:

> As nossas exigências de nós próprios tornaram-se infinitamente maiores; as demonstrações dos nossos antecessores já não nos satisfazem, e, no entanto, os factos matemáticos que eles descobriram mantêm-se e demonstramo-los por métodos infinitamente mais rigorosos e precisos, métodos dos quais a intuição geométrica, com o seu carácter de indícios mal analisados, foi totalmente banida.

A geometria, como ramo autónomo, está morta; não é mais do que o estudo de estruturas algébricas-topológicas particularmente interessantes.

Todavia, o formalista só consegue eliminar a intuição concentrando toda a atenção no melhoramento das demonstrações e numa apresentação final dogmática e irrefutável.

Para a questão óbvia — porque estará alguém interessado nestes teoremas superprecisos e superconfiáveis? —, o formalismo não tem resposta, pois o interesse destes teoremas vem do seu significado, e significado é precisamente o que o formalista despreza como sendo não matemático.

Se perguntarmos ao formalista como é que os nossos antecessores conseguiram encontrar os teoremas correctos através de raciocínios incorrectos, ele apenas pode responder: *«Por intuição.»*

Cauchy conhecia o teorema integral de Cauchy, apesar de não «saber» (no sentido formalista de uma definição formal da teoria de conjuntos) o significado de nenhum dos termos da formulação do teorema. Cauchy não sabia o que é um número complexo, ou o que é um integral, ou o que é uma curva; no entanto, sabia como calcular correctamente o número complexo representado pelo integral sobre essa curva! Como é que tal é possível? É fácil. Cauchy era (como todos sabemos) um grande matemático e, por isso, podia confiar na sua intuição.

Mas o que é esta intuição? Pelo menos, o platonista acredita em objectos reais (ideais por natureza), que podemos, de algum modo, apreender ou «intuir». Se o formalista não acreditar que existem tais coisas, o que será essa intuição? A única resposta que pode dar é *formalização inconsciente.* Cauchy era um desses génios: conhecia subconscientemente uma demonstração «correcta» do teorema. O que implica, sem dúvida, conhecer as definições correctas de todos os termos envolvidos na formulação do teorema.

Esta resposta é especialmente interessante para aqueles que têm a experiência de conceber conjecturas correctas que não conseguem demonstrar. Se a nossa conjectura intuitiva é o resultado de um cálculo inconsciente, então, (*a*) ou o inconsciente tem um método secreto de cálculo, melhor do que qualquer método conhecido, ou (*b*) a demonstração está na minha cabeça, mas não consigo torná-la visível.

Os formalistas que queiram considerar o problema da descoberta e ver a matemática no seu contexto histórico têm de introduzir uma intuição misteriosa para explicar a enorme diferença entre a descrição da matemática (um jogo segundo as regras) e a experiência real da matemática, onde muitas vezes se consegue mais quebrando as regras do que lhes obedecendo.

Agora, que construímos e destruímos o nosso homem de palha, chegou a altura de dizer qual é o problema, segundo a nossa visão, e como

nos propomos procurar uma resposta. O problema consiste em explicar o fenómeno do conhecimento intuitivo em matemática, torná-lo inteligível. Este é o problema fundamental da epistemologia matemática. Isto é, o que sabemos e como o sabemos?

Propomo-nos responder a esta pergunta com outra pergunta: que ensinamos e como o ensinamos? Ou melhor, que tentamos ensinar e porque pensamos que é necessário ensiná-lo?

Tentamos ensinar conceitos matemáticos, não formalmente (memorizando definições), mas intuitivamente — mostrando exemplos, fazendo problemas, desenvolvendo uma técnica de raciocínio que é a expressão de se ter interiorizado algo com sucesso. O quê? Uma ideia matemática intuitiva.

Deste modo, a intuição fundamental dos números naturais é um conceito partilhado, uma ideia comum a todas as pessoas que tiveram certas experiências de brincar com moedas ou tijolos, botões ou seixos, até podermos afirmar (uma vez que obtemos as respostas «certas» para as nossas questões) que perceberam a ideia — que, apesar de, mais cedo ou mais tarde, esgotarmos sempre os botões ou moedas, permanece uma ideia de algo parecido com um gigantesco balde de botões ou moedas, que nunca se esgotaria.

Ou seja, a intuição não é uma percepção directa de alguma coisa que existe externa e internamente. É o efeito na mente de certas experiências de actividade ou manipulação de objectos concretos (mais tarde, de marcas num papel ou mesmo de imagens mentais). Como resultado destas experiências, existe algo (um traço, um efeito) na mente do aluno, que é a sua representação dos inteiros. Contudo, a sua representação é equivalente à minha, na medida em que ambos obtemos a mesma resposta para qualquer questão — ou, se obtivermos respostas diferentes, podemos comparar notas e perceber qual está certa. Fazemo-lo, não porque nos ensinaram um conjunto de regras algébricas, mas porque as nossas imagens mentais são coincidentes. Se não o forem, uma vez que sou o professor e sei que a minha imagem mental corresponde à aceite pela sociedade (àquela que todos os outros professores têm), o aluno recebe más notas e não é incluído em qualquer discussão futura do problema.

Temos intuição porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Adquirimos estas representações, não através da memorização de fórmulas verbais, mas através de experiências repetidas (a um nível elementar, experiências de manipulação de objectos físicos; a um nível avançado, experiências de resolução de problemas e descoberta de coisas por nós próprios).

Estas representações mentais são verificadas pelos nossos professores e colegas. Se não obtivermos a resposta certa, chumbamos. Desta maneira, as representações de pessoas diferentes estão sempre a ser comparadas umas com as outras para garantir que são congruentes.

É claro que não sabemos como é que estas representações são guardadas na nossa mente. Contudo, também sabemos pouco sobre o modo como qualquer outro pensamento ou conhecimento é guardado na mente.

O importante é que, como conceitos partilhados, como representações mentais mutuamente congruentes, elas são objectos reais cuja existência é tão «objectiva» como o amor da mãe e os preconceitos raciais, como o preço do chá ou o temor a Deus. Como é que distinguimos então a matemática dos outros estudos humanísticos? Obviamente, existe uma diferença fundamental entre a matemática e, por exemplo, a crítica literária. Se a matemática é semelhante a uma disciplina humanística em relação ao assunto tratado, é semelhante a uma ciência na sua objectividade. Os resultados reprodutíveis — que têm sempre o mesmo resultado — sobre o mundo físico são denominados científicos e as disciplinas com resultados reprodutíveis são denominadas ciências naturais. No reino das ideias, dos objectos mentais, as ideias cujas propriedades são reprodutíveis são denominadas objectos matemáticos e o estudo de objectos mentais com propriedades reprodutíveis é denominado matemática. A intuição é a faculdade através da qual podemos pensar ou examinar tais objectos (internos e mentais).

Naturalmente, existe sempre alguma possibilidade de desacordo entre as intuições. O processo de ajuste mútuo para garantir o acordo nunca está completo. À medida que surgem novas questões, novos aspectos da estrutura são examinados com a atenção que nunca antes tinham tido.

Por vezes a questão não tem resposta. (Não há nenhuma razão segundo a qual a hipótese do contínuo tenha de ser verdadeira ou falsa.)

Sabemos que podemos fazer perguntas sobre os objectos físicos que são inapropriadas, que não têm resposta. Por exemplo, quais são a posição e a velocidade exactas de um electrão? Quantas árvores existem neste momento no estado de Vermont? Para os objectos mentais, tal como para os objectos físicos, pode suceder que o que parece ser, à primeira vista, uma questão apropriada se revele, com grande dificuldade, inapropriada. Tal não questiona a existência do objecto mental (ou físico) em consideração. Existem muitas outras questões apropriadas, para as quais podem ser dadas respostas definidas e seguras.

A dificuldade em percebermos o que é a intuição deve-se à exigência de que a matemática seja infalível. Esta exigência é cumprida por ambas as filosofias tradicionais, formalismo e platonismo. Cada uma delas tenta

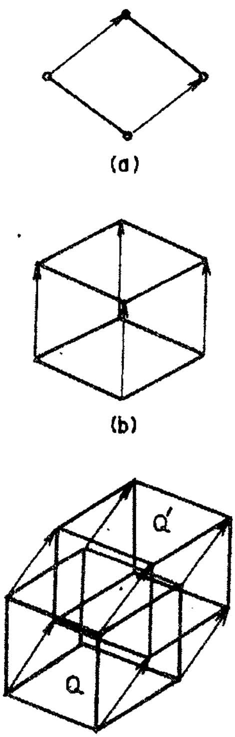
criar uma matemática tão sobre-humana como Platão queria. Contudo, como cada um o faz falsificando a natureza da matemática como ela é (na vida humana, na história), cria-se uma confusão e um mistério desnecessários.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

M. Bunge; H. Hahn; A. Lichnerowicz; R. Wilder [1967].

Intuição quadridimensional

Uma linha é unidimensional. Uma superfície plana é bidimensional. Os objectos sólidos são tridimensionais. Mas o que é a quarta dimensão?



(a) (b) (c)

Por vezes as pessoas dizem que o tempo é uma quarta dimensão. Na física da relatividade de Einstein, é utilizada uma geometria quadridimensional, na qual um espaço tridimensional e uma coordenada temporal unidimensional são unidos num único contínuo quadridimensional. Todavia, não queremos falar sobre relatividade e espaço-tempo. Apenas queremos saber se faz sentido dar mais um passo na lista de dimensões geométricas.

Por exemplo, a duas dimensões temos as figuras familiares: o círculo e o quadrado. Os objectos correspondentes a três dimensões são a esfera e o cubo. Poderemos falar razoavelmente acerca de uma hiperesfera ou de um hipercubo a quatro dimensões?

Podemos ir de um ponto até um cubo em três passos. No primeiro passo pegamos em dois pontos separados por 1 cm e unimo-los. Obtemos um intervalo linear, uma figura unidimensional. A seguir, pegamos em duas linhas de 1 cm, paralelas e separadas por 1 cm. Ligamos cada par de extremidades e obtemos um quadrado (de 1 cm de lado), uma figura bidimensional. De seguida, pegamos em dois quadrados (de 1 cm de lado)

paralelos. Suponhamos que o primeiro quadrado está directamente acima do segundo, a 1 cm de distância. Unimos os cantos correspondentes e obtemos um cubo (de 1 cm de lado).

Para obtermos um hipercubo de 1 cm de lado temos de ter dois cubos (de 1 cm de lado) paralelos, separados por 1 cm, e unir os vértices. Deste modo, obteríamos um hipercubo com 1 cm de lado, uma figura quadridimensional.

O problema é que em cada passo temos de ir numa nova direcção. A nova direcção tem de ser perpendicular a todas as outras. Depois de nos movermos para trás e para a frente, para a direita e para a esquerda e, finalmente, para cima e para baixo, esgotamos todas as direcções que nos são acessíveis. Somos criaturas tridimensionais, incapazes de escapar do espaço tridimensional para a quarta dimensão. De facto, a ideia de uma quarta dimensão física pode ser uma mera fantasia, um folclore para a ficção científica. O único argumento a favor é que podemos conceber uma quarta dimensão; não há nada de ilógico ou inconsistente na nossa concepção.

Podemos encontrar as diversas propriedades que um hipercubo quadridimensional teria se existisse. Podemos contar o número de arestas, vértices e faces que teria. Uma vez que seria construído juntando dois cubos, cada um com 8 vértices, o hipercubo teria 16 vértices. Teria todas as arestas dos dois cubos; teria também novas arestas, uma por cada par de vértices que foi ligado. Isto dá $12 + 12 + 8 = 32$ arestas. Com um pouco mais de trabalho, é possível ver que teria 24 faces quadradas e 8 hiperfaces cúbicas.

A tabela que se segue indica o número de «peças» do intervalo, do quadrado, do cubo e do hipercubo (é uma descoberta fantástica notar que a soma das diversas peças é sempre uma potência de 3!):

Dimensão	Objecto	0 faces (vértices)	1 face (arestas)	2 faces (faces)	3 faces	4 faces
0	Ponto	1				
1	Intervalo	2	1			
2	Quadrado	4	4	1		
3	Cubo	8	12	6	1	
4	Hipercubo	16	32	24	8	1

Numa disciplina prática de resolução de problemas para professores do secundário e estudantes do ramo de educação, a descoberta gradual destes factos sobre hipercubos demora uma ou duas semanas. O facto de conseguirmos descobrir tanta informação bem definida acerca do hipercubo parece indicar que ele deve, de algum modo, existir.

É claro que o hipercubo é apenas uma ficção em termos de existência física. Quando perguntamos quantos vértices tem um hipercubo, estamos, na realidade, a perguntar quantos teria se tal coisa existisse. É como o remate da velha anedota: «Se tivesses um irmão, será que ele gostaria de arenque?» A diferença é que a pergunta acerca de um irmão que não existe é uma questão sem sentido; a pergunta acerca dos vértices de um cubo não existente não é tão sem sentido, uma vez que tem uma resposta bem definida.

Na realidade, usando métodos algébricos, definindo um hipercubo através de coordenadas, podemos responder (pelo menos em princípio) a qualquer questão acerca do hipercubo. Pelo menos, podemos reduzi-la à álgebra, tal como a geometria analítica usual reduz questões acerca de figuras bi e tridimensionais à álgebra. Assim, uma vez que a álgebra com quatro variáveis não é essencialmente mais difícil do que com duas ou três, podemos responder a questões sobre hipercubos tão facilmente como a questões sobre quadrados ou cubos. Deste modo, um hipercubo é um bom exemplo daquilo a que nos referimos quando falamos em existência matemática. É um objecto fictício ou imaginário, mas não há dúvidas em relação ao número de vértices, arestas, faces e hiperfaces que tem! (Ou teria, se preferirmos o modo condicional.) Os objectos da geometria usual a três ou a duas dimensões também são objectos matemáticos, isto é, imaginários ou fictícios; no entanto, estão mais próximos da realidade física, ao contrário do hipercubo, que não conseguimos construir.

O cubo matemático a três dimensões é um objecto ideal, mas podemos olhar para um cubo de madeira e usá-lo para determinar propriedades do cubo matemático. O número de arestas do cubo matemático é 12; o número de arestas de um cubo de açúcar também é 12. Podemos aprender imenso acerca da geometria bi e tridimensional desenhando figuras ou construindo modelos e examinando-os. Embora seja possível enganarmo-nos devido à má utilização de uma figura ou modelo, é bastante difícil que isso aconteça. É preciso engenho para inventar uma situação onde tal engano pudesse ocorrer. Regra geral, a utilização de figuras e modelos é uma ajuda, por vezes essencial, para a compreensão da geometria a duas ou a três dimensões.

Raciocínios baseados em figuras ou modelos, tanto reais como mentais, denominar-se-iam raciocínios intuitivos, por oposição ao raciocínio formal ou rigoroso.

No que toca à geometria a quatro dimensões, pareceria que, uma vez que somos meras criaturas tridimensionais, estaríamos excluídos pela natureza da possibilidade de raciocinar intuitivamente sobre objectos

tetradimensionais. E, no entanto, tal não é verdadeiro. A compreensão intuitiva de figuras tetradimensionais não é impossível.

Na Universidade de Brown, Thomas Banchoff, matemático, e Charles Strauss, cientista de computadores, fizeram um filme gerado por computador de um hipercubo a mover-se para dentro e para fora do nosso espaço tridimensional. Para percebermos o que fizeram, imaginemos uma criatura plana, bidimensional, que vive na superfície de um lago e só pode ver outros objectos na superfície (mas não abaixo nem acima). Esta criatura plana estaria limitada a duas dimensões físicas, tal como nós estamos limitados a três. Ela só poderia conhecer objectos tridimensionais através das suas intersecções bidimensionais com o seu mundo plano. Se um cubo maciço passasse através da superfície da água, a criatura veria as secções que o cubo faria com essa superfície à medida que penetrasse na água.

Se o cubo entrasse repetidamente na água, com ângulos e direcções diferentes, essa criatura teria, a certa altura, informação suficiente para o «compreender», apesar de não poder escapar do seu mundo bidimensional.

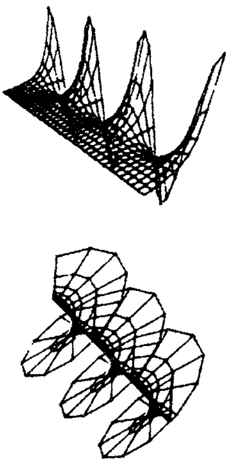
O filme de Strauss-Banchoff exibe aquilo que veríamos se um hipercubo passasse pelo nosso espaço a três dimensões segundo vários ângulos. Veríamos diversas configurações, mais ou menos complexas, de vértices e arestas. Uma coisa é descrever com uma fórmula matemática o que se passa. Outra coisa completamente diferente é ver uma imagem; melhor ainda, vê-la em movimento. Quando vi o filme de Banchoff e Strauss, fiquei impressionado com essa apresentação* e pelo puro prazer visual de a ver. Porém, senti-me um pouco desapontado; não ganhei nenhuma intuição em relação ao hipercubo.

Alguns dias mais tarde, no Centro de Computação da Universidade de Brown, Strauss fez-me uma demonstração do sistema gráfico interactivo que tornou possível produzir o filme. O utilizador senta-se em frente de um painel de controlo e de um ecrã de televisão. Três botões permitem-lhe rodar uma figura a quatro dimensões segundo qualquer par de eixos do espaço tetradimensional. À medida que o faz, vê no ecrã as diferentes figuras tridimensionais que correspondem à intersecção da figura tetradimensional quando roda no espaço tridimensional.

Outro controlo manual permite-nos pegar nesta fatia tridimensional e rodá-la à vontade no nosso espaço. Um outro botão permite aumentar ou encolher a imagem; o espectador parece estar a voar para longe da

---

* Este filme, incidentalmente, ganhou o Prémio da Investigação Fundamental no Festival de Bruxelas de 1979.



A função exponencial complexa (um objecto quadridimensional) representada sob vários pontos de vista

Cortesia: Produções Banchoff & Strauss

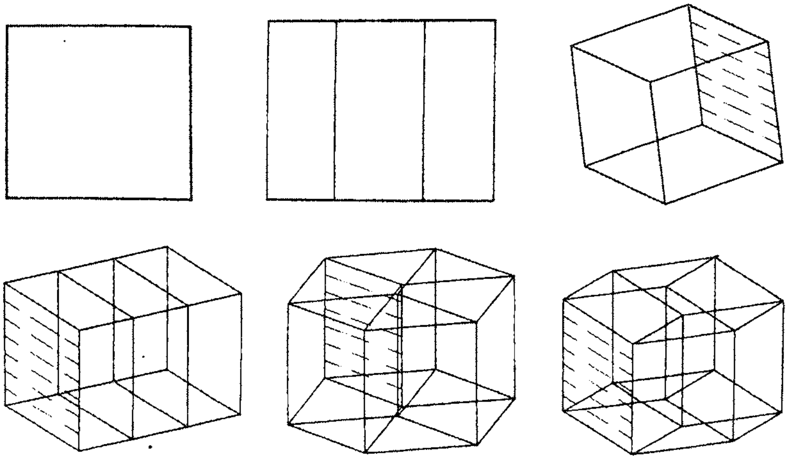
imagem ou então em direcção à imagem e mesmo para o interior do ecrã. (Alguns dos efeitos, no filme *Guerra das Estrelas,* dos voos e das batalhas através das estrelas foram criados deste modo, utilizando gráficos de computador.)

No centro de computação, Strauss mostrou-me como estes controlos podiam ser utilizados para obtermos as diversas vistas da projecção tridimensional de um hipercubo. Eu observava e esforçava-me por perceber o que estava a acontecer. Ele levantou-se e ofereceu-me a cadeira dos controlos.

Tentei virar o hipercubo, distanciá-lo, trazê-lo para perto, virá-lo ao contrário. De repente consegui senti-lo! O hipercubo tinha passado para a realidade palpável à medida que aprendia a manipulá-lo, sentindo na ponta dos dedos o poder de mudar o que via e de voltar a mudá-lo. O controlo activo na consola do computador criou uma união cinética, estética e de pensamento visual que trouxe o hipercubo até ao nível da compreensão intuitiva.

Neste exemplo, podemos começar apenas com a compreensão abstracta ou algébrica. Ela pode ser usada para construir um sistema de computador que permite simular para o hipercubo o género de experiências de manuseamento, movimento e visão de cubos reais que nos dá a nossa intuição tridimensional. Assim, a intuição tetradimensional está disponível para aqueles que a quiserem ou dela necessitarem.

A existência desta possibilidade abre-nos novas perspectivas para a investigação sobre a intuição matemática. Em vez de trabalhar com crianças ou material etnográfico ou histórico, como temos de fazer para estudar a génese da intuição da geometria elementar (a escola de Piaget), poder-se-ia trabalhar com adultos, com formação matemática ou não, e tentar documentar, através de testes psicológicos objectivos, o desenvolvimento da intuição tetradimensional, separando, possivelmente, os papéis desempenhados pela visão (observação passiva) e pela cinética-estética (manipulação activa). Com tal estudo, a nossa compreensão sobre a intuição matemática poderia aumentar. Existiriam menos desculpas para utilizar a intuição como um termo envolvente para explicar tudo o que fosse misterioso ou problemático.



Seis perspectivas de um hipercubo extraídas de um sistema geral de gráficos por computador para a apresentação em tempo real de «esqueletos» de objectos a quatro dimensões

Pensando agora de novo na questão epistemológica, perguntamo-nos se na realidade houve alguma vez, em princípio, diferença entre tetradimensional e tridimensional. Podemos desenvolver a intuição para o objecto imaginário a quatro dimensões. Uma vez conseguido isso, o objecto não parece mais imaginário do que coisas «reais», como sejam curvas e superfícies no espaço. São tudo objectos ideais que conseguimos compreender tanto visualmente (intuitivamente) como logicamente.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

H. Freudenthal [1978]; J. Piaget [1970, 71]; T. Banchoff e C. M. Strauss.

Factos verdadeiros acerca de objectos imaginários

A hipótese tácita dos três pontos de vista fundacionistas tradicionais é a de que a matemática deve ser uma fonte de verdade indubitável. A experiência real de todas as escolas — e a experiência diária dos matemáticos — mostra que a verdade matemática, como as outras verdades, é falível e corrigível.

Teremos mesmo de escolher entre um formalismo refutado pela nossa experiência diária e um platonismo que postula uma terra mítica, encantada, onde o incontável e o inacessível estão à espera de ser observados pelo matemático, a quem Deus abençoa com uma intuição suficientemente boa? É razoável propor uma tarefa diferente para a filosofia matemática; essa tarefa não é a procura de verdade indubitável, mas sim encontrar uma descrição do conhecimento matemático como ele é na realidade — falível, corrigível, tentativo e sujeito a evolução, como todos os outros tipos de conhecimento humano. Em vez de continuarmos a procurar em vão os fundamentos, tentámos ver o que é a matemática na realidade e descrevê-la como parte do conhecimento humano em geral. Tentámos reflectir honestamente sobre o que fazemos quando utilizamos, ensinamos, inventamos ou descobrimos a matemática.

A essência da matemática é a sua liberdade, disse Cantor. Liberdade para construir, liberdade para fazer suposições. Estes aspectos da matemática são reconhecidos no construtivismo e no formalismo. No entanto, Cantor era um platonista, crente numa realidade matemática que transcende a mente humana. Estas construções, estes mundos imaginados, impõem-nos então a *sua* ordem. Temos de reconhecer a sua objectividade; eles são em parte conhecidos; em parte, misteriosos e difíceis de conhecer; em parte, talvez, impossíveis de conhecer. Esta é a verdade que o platonista vê.

O que acontece quando observamos no mundo dois factos contraditórios, sendo ambos inegavelmente verdadeiros? Somos forçados a modificar a nossa visão do mundo, somos forçados a encontrar um ponto de vista no qual os factos não sejam contraditórios mas compatíveis.

Uma outra maneira de exprimir o mesmo é a seguinte: se um facto é contrário ao senso comum e, mesmo assim, somos forçados a aceitar e a trabalhar com ele, então, aprendemos a alterar a nossa noção de senso comum.

Existem dois factos que conhecemos acerca da natureza da matemática.

O facto 1 é que a matemática é uma invenção humana. Os matemáticos sabem-no porque são eles que a inventam.

A aritmética e a geometria elementar que todos conhecem parecem dádivas de Deus, pois estão presentes em todo o lado e, aparentemente, sempre estiveram. Os últimos truques algébricos utilizados pelos topólogos, a mais recente variação dos operadores pseudodiferenciais, foram inventados tão recentemente que sabemos os nomes e as moradas dos inventores. Ainda brilham como novos. Porém, podemos ver a linha de descendência. A semelhança familiar é inconfundível, da última coisa à

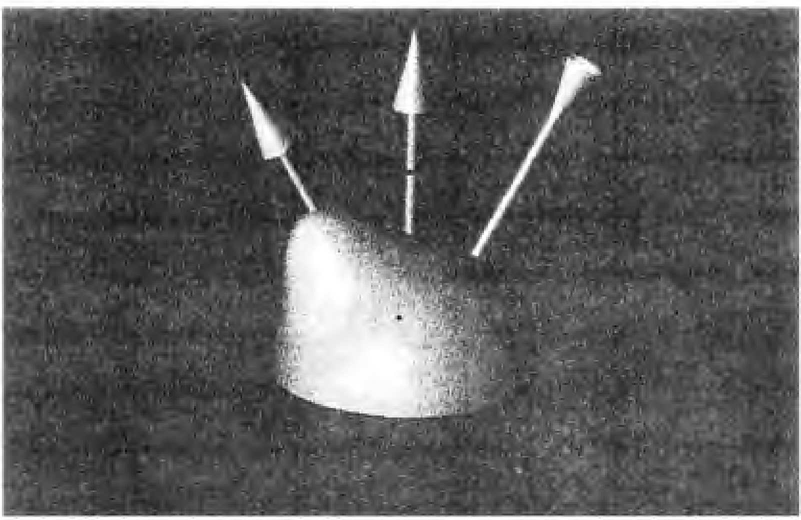
mais antiga. A aritmética e a geometria vêm do mesmo lugar que a teoria das homotopias — do cérebro humano. Todos os dias milhões de nós trabalham para inculcá-las noutros cérebros humanos.

O facto 2 é que estas coisas que trazemos ao mundo, estas figuras geométricas, funções aritméticas e operadores algébricos, são misteriosos para nós, seus criadores. Têm propriedades que descobrimos apenas através de grande esforço e engenho; têm outras propriedades que tentamos em vão descobrir; têm outras propriedades ainda de que nem suspeitamos. Toda a actividade de resolução matemática de problemas é testemunha do facto 2.

O formalismo é construído sobre o facto 1. Reconhece que a matemática é a criação da mente humana. Os objectos matemáticos são imaginários.

O platonismo é construído sobre o facto 2. O platonista reconhece que a matemática tem as suas leis, às quais temos de obedecer. Uma vez construído um triângulo rectângulo, com lados a, b, e hipotenusa h, então, $a^2 + b^2 = h^2$, quer queiramos, quer não. Não sei se 1375803627 é um número primo ou não; porém, sei que não me cabe a mim escolher: isso fica decidido assim que escrevo o número.

Estes objectos imaginários têm propriedades bem definidas. Existem factos verdadeiros acerca de objectos imaginários.



Factos verdadeiros acerca de objectos «inexistentes». Esta imagem, produzida por computador, representa um objecto que só «existe» na memória do computador

Cortesia: Departamento de Ciências Computacionais, Universidade do Utah

Do ponto de vista platonista, o facto 1 é inaceitável. Uma vez que os objectos matemáticos são o que são, desafiando a nossa ignorância ou preferência, devem ser reais num sentido independente das mentes humanas. De algum modo, que não conseguimos explicar ou entender, eles existem fora do mundo material e fora da mente humana.

Do ponto de vista construtivista, o facto 2 é inaceitável. Uma vez que a matemática é uma criação nossa, nada em matemática é verdadeiro antes de ser conhecido — na realidade, antes de ser demonstrado por métodos construtivos.

Quanto ao formalista, este escapa ao dilema, negando, simplesmente, tudo. Não existem objectos matemáticos; logo, não existem problemas acerca da natureza dos objectos matemáticos.

Se quisermos esquecer o platonismo, o construtivismo e o formalismo, podemos tomar como ponto de partida os dois factos que retiramos da experiência matemática:

- *Facto 1:* a matemática é uma criação nossa; é acerca de ideias nas nossas mentes.
- *Facto 2:* a matemática é uma realidade objectiva, no sentido em que os objectos matemáticos têm propriedades bem definidas, que podemos ou não conseguir descobrir.

Se acreditarmos na nossa própria experiência e aceitarmos estes dois factos, então, temos de nos perguntar como podem eles ser conciliados, como podemos torná-los compatíveis, não contraditórios. Ou melhor, temos de descobrir que suposições estamos a fazer que nos obrigam a encontrar algo incompatível ou contraditório nestes dois factos. Podemos, depois, tentar eliminar estes pressupostos de modo a desenvolvermos um ponto de vista que abranja a realidade da experiência matemática.

Num contexto filosófico, estamos habituados a pensar que o mundo só contém dois tipos de material — a matéria, ou seja, a substância física, que se estuda nos laboratórios de física, e a mente, a minha ou a sua mente, a psique privada de cada um de nós, algures no interior dos nossos crânios. Contudo, estas duas categorias são inadequadas, tal como as quatro categorias da Grécia antiga, terra, ar, fogo e água, eram inadequadas para a física.

A matemática é uma realidade objectiva, que não é nem física nem subjectiva. É uma realidade ideal (ou seja, não física) que é objectiva (independente da consciência de qualquer pessoa em particular). Na verdade, o exemplo da matemática é a prova mais forte, mais convincente, da existência de tal realidade ideal.

É esta a nossa conclusão: não podemos amputar a matemática para se ajustar a uma filosofia demasiado pequena para ela; pelo contrário, temos de exigir que as categorias filosóficas sejam desenvolvidas de modo a aceitarem a realidade da nossa experiência matemática.

O trabalho recente de Karl Popper apresenta um contexto no qual a experiência matemática se ajusta sem distorção. Popper introduziu os termos *mundo 1, 2 e 3* para distinguir três grandes níveis de realidade.

O mundo 1 é o mundo físico, o mundo de massa e energia, de estrelas e pedras, de sangue e ossos.

O mundo da consciência emerge do mundo material no decurso da evolução biológica. Pensamentos, emoções e consciência são realidades não físicas. A sua existência é inseparável da do organismo vivo; porém, elas são diferentes dos fenómenos fisiológicos e anatómicos; têm de ser compreendidas a um nível diferente. Essas realidades pertencem ao mundo 2.

Com o progresso da evolução apareceram a consciência social, as tradições, a linguagem, as teorias, as instituições sociais, toda a cultura não material da humanidade. A sua existência é inseparável da consciência individual dos membros da sociedade. Contudo, elas são diferentes do fenómeno da consciência individual. Têm de ser compreendidas a um nível diferente. Pertencem ao mundo 3. É claro que este é o mundo onde se encontra a matemática.

A matemática não é o estudo de uma realidade ideal, preexistente e intemporal. Nem é um jogo, tipo xadrez, com símbolos e fórmulas inventadas. É antes a parte dos estudos humanos que é capaz de alcançar um consenso, como o da ciência, é capaz de estabelecer resultados *reprodutíveis*. A existência da matemática é um facto, não uma questão. Este facto não é nem mais nem menos do que a existência de modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias, aliciantes e conclusivas, que «não são controversas uma vez compreendidas».

A matemática debruça-se, realmente, sobre um determinado assunto e as suas afirmações têm significado. No entanto, este significado deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos, e não numa realidade externa, não humana. Neste aspecto, a matemática é semelhante a uma ideologia, uma religião ou uma forma de arte; ela trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura. Por outras palavras, a matemática é um estudo humanístico. É uma das humanidades.

A característica especial da matemática, que a distingue das outras humanidades, é a qualidade de ser como uma ciência. As suas conclusões são bem definidas, tal como as conclusões da ciência natural. Não são

simples produtos de opinião e não estão sujeitas a um desacordo permanente como as ideias de um crítico literário.

Como matemáticos, sabemos que inventamos objectos ideais e depois tentamos descobrir factos acerca deles. Qualquer filosofia que não consiga incorporar esta experiência é demasiado pequena. Não precisamos de nos refugiar no formalismo quando somos atacados por filósofos. Nem temos de admitir que a nossa crença na objectividade da verdade matemática é platónica, no sentido de exigir uma realidade ideal separada do pensamento humano. Os trabalhos de Lakatos e de Popper mostram que a filosofia moderna é capaz de aceitar a veracidade da experiência matemática. Isto significa aceitar a legitimidade da matemática tal como ela é: falível, corrigível e com significado.

Leituras complementares (consulte a bibliografia)

K. Popper e J. Eccles.

Glossário

Ajuste de uma curva: encontrar uma fórmula «simples» ou uma curva geométrica «simples» que aproxima dados físicos ou estatísticos. A descoberta, por Kepler, de que as órbitas são elípticas é um exemplo clássico de ajuste de dados a uma curva.

Algoritmo: um processo fixo que, se for executado sistematicamente, produz o resultado desejado. Assim, o «algoritmo euclidiano» é um conjunto de regras que, quando aplicadas a dois inteiros, produzem o seu máximo divisor comum.

Análise: o desenvolvimento moderno do cálculo diferencial e integral.

Análise de Fourier: a estratégia matemática segundo a qual uma curva periódica (função) é decomposta em curvas periódicas elementares (senos e co-senos).

Análise não standard: um sistema matemático de números (e cálculo correspondente) tornado logicamente rigoroso nos anos 60 por Abraham Robinson e que admite quantidades infinitamente pequenas.

Argumento: um valor particular no qual se calcula uma função. Se a função é $y = x^2$, o argumento $x = 7$ dá-nos o valor $y = 7^2 = 49$. A variável independente de um função.

Axioma: afirmação que é aceite como base para uma discussão lógica subsequente. Historicamente, considerava-se que um axioma incorporava uma verdade ou princípio «evidente».

Axioma da escolha: um princípio que valida um certo tipo de construção matemática. O axioma da escolha afirma que, dada uma colecção de conjuntos, pode formar-se um novo conjunto extraindo exactamente um elemento de cada conjunto da colecção dada.

Bit: um dígito da representação binária de um número. Por exemplo, 1101 é um número de quatro bits. A unidade fundamental da informação formalizada.

Byte: oito dígitos binários (bits).

Combinatória: a disciplina matemática que «conta sem contar», numa tentativa de responder a questões do tipo «de quantas maneiras...?». *Exemplo:* de quantas maneiras é que cinco maridos e as respectivas mulheres podem sentar-se à volta de uma mesa circular de modo que nenhuma mulher se sente ao lado do marido?

Comprimento da palavra: o número de bits processado por um computador como uma única unidade.

Conjectura de Goldbach: a conjectura que afirma que todo o número par é a soma de dois números primos.

Construtivismo (terminologia anterior: intuicionismo): a doutrina que afirma que os únicos objectos matemáticos que têm existência real e significado são os que podem ser «construídos» a partir de certos objectos primitivos de um modo finito. Associado com o matemático holandês L. E. J. Brouwer e seus seguidores.

Equação diofantina: uma equação que tem soluções inteiras. Por exemplo, a equação diofantina $2x^2 - 3y^2 = 5$ tem a solução inteira $x = 2$, $y = 1$.

Espaço funcional: um conjunto de funções cujos membros satisfazem determinadas condições. Um exemplo famoso é o conjunto de todas as funções definidas no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ que são mensuráveis à *Lebesgue* e tais que $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty$. Um exemplo menos sofisticado poderia ser o conjunto de todas as funções parabólicas $y = ax^2 + bx + c$.

Formalismo: a posição segundo a qual a matemática consiste meramente em símbolos ou expressões, manipulados ou combinados de acordo com regras ou acordos preestabelecidos. O formalismo não se preocupa com o significado das expressões.

Função: em geral, uma associação entre elementos de dois conjuntos. Mais restrita: uma fórmula através da qual uma tal associação pode ser calculada; uma curva, uma regra ou uma «caixa negra» que produz uma saída fixa para uma dada entrada. Exemplo: $y = x^2$. Entrada: x; saída: x^2.

Geometria não euclidiana: uma geometria baseada em axiomas que contradizem os postulados propostos por Euclides. Particularmente, uma geometria na qual o quinto postulado de Euclides é substituído por alternativas. O quinto axioma afirma que por um ponto fora de uma linha passa uma e apenas uma recta paralela a essa linha. Um caso especial de geometria não euclidiana postula que não existe nenhuma recta com essa propriedade.

Grupo: um grupo é uma estrutura algébrica para a qual se verificam determinadas condições (axiomas). Existe um conjunto de elementos. Os elementos podem ser combinados dois a dois por uma operação «.», tendo como resultado outro elemento do conjunto. O processo de combinação satisfaz a «propriedade associativa»: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. O conjunto contém um elemento «identidade» e que satisfaz $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo o a no conjunto. Para cada elemento a do conjunto existe um elemento inverso a^{-1} que satisfaz $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$. Um exemplo muito simples de um grupo é o

conjunto dos dois números 1 e −1 combinados pela multiplicação. O elemento 1 é a identidade. Os inversos de 1 e −1 são 1 e −1. A *ordem* de um grupo é o número de elementos que ele contém.

Hipótese do contínuo: na teoria de conjuntos cantoriana o número cardinal de um conjunto designa a sua potência. A cardinalidade do conjunto dos inteiros 1, 2, 3 ... é designada por $\aleph_0$. A cardinalidade do conjunto dos números reais é $2^{\aleph_0}$. A hipótese do contínuo afirma que não existe nenhum conjunto cujo cardinal se encontre entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$.

Inteiros: os inteiros positivos são 1, 2, 3, ... Os inteiros negativos são −1, −2, −3, ... Existe ainda o 0, o inteiro zero.

Lema: um teorema preparatório. Possivelmente com algum interesse em si próprio, contudo utilizado como um degrau na demonstração de um teorema mais substancial.

Logicismo: a posição segundo a qual a matemática é idêntica à lógica simbólica. Um dos primeiros defensores desta posição foi Bertrand Russell.

Matriz: um quadro rectangular de itens (geralmente números):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ são matrizes}$$

Módulo: quando consideramos inteiros «módulo 3», desprezamos múltiplos de 3 e ficamos só com o resto. Assim, 7 (módulo 3) = 1 porque $7 = (3 \cdot 2) + 1$. O raciocínio é idêntico para outros módulos. Um relógio regista o tempo módulo 12 e não o tempo acumulado. O conta-quilómetros, num carro, regista a quilometragem módulo 100 000 km.

Notação binária: a representação de inteiros em termos de potências de 2, muito utilizada nos computadores:

Decimal	**Binário**	**Explanação**
1	1	$1 = (1 \times 1)$
2	10	$2 = (2 \times 1) + (1 \times 0)$
3	11	$3 = (2 \times 1) + (1 \times 1)$
4	100	$4 = (4 \times 1) + (2 \times 0) + (1 \times 0)$
5	101	$5 = (4 \times 1) + (2 \times 0) + (1 \times 1)$
6	110	$6 = (4 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 0)$
7	111	$7 = (4 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times 1)$

Número irracional: um número real que não é um número racional (fracção). Um dos primeiros irracionais a ser descoberto foi $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ «A maior parte» dos números reais é irracional, num sentido que foi tornado preciso por Georg Cantor.

Número natural: qualquer dos inteiros 1, 2, ... Os inteiros positivos.

Número racional: qualquer número que é a razão de dois inteiros: $\frac{1}{1}$, $-\frac{6}{7}$, $\frac{21}{108}$, $\frac{4627}{1039}$. Uma fracção.

Número real: qualquer número cuja expansão decimal é finita ou infinita. Exemplos:

1
2817
–30,00792
81,1111...
0,1234567891011121314
3,14159...

Qualquer número racional ou irracional.

Números complexos: um número da forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ (ou $i^2 = -1$). O estudo sistemático dos números desta forma denomina-se «teoria das funções de variável complexa» e é muito utilizado tanto na matemática pura como na aplicada.

Paradoxo de Russell: popularmente, o grego que disse que todos os gregos são mentirosos — estava a mentir ou a dizer a verdade?

Num contexto matemático: o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si próprios. Esta definição implica uma contradição.

Platonismo: de acordo com a sua utilização neste livro, platonismo é a posição segundo a qual toda a matemática existe eternamente, independentemente do homem, e o objectivo do matemático é descobrir estas verdades matemáticas.

Ponto fixo: um ponto que não se altera através de uma transformação. Assim, se um disco é rodado em torno do seu centro, o centro é um ponto fixo.

Problema de Dirichlet: dada uma região R no plano $x - y$ e uma função f definida na fronteira B de R, o problema de Dirichlet procura encontrar uma função $u(x, y)$ que satisfaça a equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ em R e que tome os valores de f em B. O problema de Dirichlet é de importância fundamental nas teorias da hidrodinâmica, aerodinâmica, elasticidade, electrostática, etc.

Resíduo: o resto da divisão de um inteiro por outro. O resíduo de 10 módulo (ou seja, da divisão por) 6 é 4.

Série: geralmente, mas nem sempre, uma *soma infinta.* Um processo matemático que requer um número infinito de adições. Assim, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ e $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ e $1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots$ são séries infinitas famosas.

Série de potências: uma série infinita de determinado tipo em que potências sucessivas de uma variável são multiplicadas por certos coeficientes e depois somadas.

Exemplos:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

A forma geral de uma série de potências na variável x é

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Sucessão: uma coisa depois da outra com uma ordem determinada, como são os inteiros positivos. Geralmente, uma sequência de números. Deste modo, a sucessão dos números pares é 2, 4, 6, ... A sucessão dos números inteiros ao quadrado é 1, 4, 9, ...

Teorema das quatro cores: deseja-se colorir um mapa político no plano de modo que países com fronteira comum tenham cores diferentes. A experiência das pessoas que fazem mapas é a de que tal é possível com apenas quatro cores. Esta afirmação, na sua formulação precisa, foi um problema matemático sem solução durante mais de cem anos. Foi «provada» com a ajuda do computador.

Teorema dos números primos: uma afirmação acerca da frequência com que ocorrem os números primos na sucessão dos inteiros positivos. Este teorema foi conjecturado nos princípios do século XIX, mas só foi firmemente estabelecido na última década desse século. Mais precisamente, se $\pi(n)$ designa o número de primos menores ou iguais a n, $\pi(n)$ é aproximadamente igual a $\frac{n}{\log n}$ e esta aproximação melhora à medida que n cresce.

Teorema fundamental da álgebra: a afirmação de que uma equação da forma $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, com $a_0, \cdots, a_n$ complexos, tem pelo menos um valor complexo x que a verifica.

Teorema/último problema de Fermat: a afirmação de que a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras positivas para x, y, z se n for um inteiro maior do que 2. Hoje em dia o último problema de Fermat é um dos mais famosos problemas por resolver da matemática.

Bibliografia

ADLER, Alfred, «Mathematics and creativity», in *The New Yorker Magazine,* 19 de Fevereiro de 1972.

AHRENS, W., *Mathematiker Anektoden,* ed. L. J. Cappon, Chapel Hill, University of North Carolina Press, 1959.

ALEXANDROFF, A. D., KOLMOGOROFF, A. N., e LAWRENTIEFF, M. A. (eds.), *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning,* Cambridge, MIT Press, 1963.

ALPER, J. L., «Groups and symmetry», in *Mathematics Today,* ed. L. A. Steen, pp. 65-82, Nova Iorque, Springer-Verlag, 1978.

ANDERSON, D. B., BINFORD, T. O., THOMAS, A. J., WEYBRAUCH, R. W., e WILKS, V. A., *After Leibniz: Discussions on Philosophy and Artificial Intelligence,* Stanford Artificial Intelligence Laboratory Memo AIM-229, Março de 1974.

ANONYMOUS, *Federal Funds for Research and Development, Fiscal Years 1977, 1978, 1979,* vol. 27, *Detailed Statistical Tables, Apêndice C. NSF-78–312,* Washington, D. C., National Science Foundation, 1978.

APPEL, K., e HAKEN, W., «The four-color problem», in *Mathematics Today,* ed. L. A. Steen, pp. 153-190, Nova Iorque, Springer-Verlag, 1978.

ARAGO, F. J., «Éloge historique de Joseph Fourier», in *Mém. Acad. Roy. Sci.,* 14, 69-138.

ARCHIBALD, R. C., *Outline of the History of Mathematics, Slaught Memorial Paper,* Buffalo, Mathematical Association of America, 1949.

ARIS, R., *Mathematical Modelling Techniques,* São Francisco, Pitman, 1978.

AUBREY, J., *Brief Lives,* ed. Andrew Clark, Oxford, Oxford University Press, 1898.

AUBREY, J., *Aubrey's Brief Lives,* ed. Oliver Lawson Dick, prefácio de Edmund Wilson, Ann Arbor, Ann Arbor Paperbacks, 1962.

BANCHOFF, T., e STRAUSS, C. M., «On folding algebraic singularities in complex 2-space», palestra e filme apresentados na reunião da American Mathematical Society, Dallas, Texas, Janeiro de 1973.

BARBEAU, E. J., e LEAH, P. J., «Euler's 1760 paper on divergent series», in *Historia Mathematica*, 3, 141-160 (1976).

BARKER, S. F., *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964.

BARWISE, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdão, North-Holland, 1977.

BASALLA, G., *The Rise of Modern Science: Internal or External Factors*, Boston, D. C. Heath and Co., 1968.

BAUM, R. J. (ed.), *Philosophy and Mathematics from Plato to the Present*, Freeman, São Francisco, 1973.

BELL, E. T., *Men of Mathematics*, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1937.

BELL, E. T., *The Development of Mathematics*, Nova Iorque, McGraw-Hill, 1949.

BELL, M. S. (ed.), *Studies in Mathematics*, vol. XVI, *Some Uses of Mathematics: a Sourcebook for Teachers and Students of School Mathematics*, Stanford, School Mathematics Study Group, 1967.

BELLMAN, R., *A Collection of Modern Mathematical Classics: Analysis*, Nova Iorque, Dover, 1961.

BENACERRAF, P., e PUTNAM, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964.

BERNAL, J. D., *The Social Function of Science*, Nova Iorque, Macmillan, 1939.

BERNSTEIN, D. L., «The role of applications in pure mathematics», in *American Mathematical Monthly*, 86, 245-253 (1979).

BETH, E. W., e PIAGET J., *Mathematics, Epistemology and Psychology*, trad. por W. Mays, Nova Iorque, Gordon and Breach, 1966.

BIRKHOFF, G., «Mathematics and psychology», in *SIAM Review*, 11, 429-469 (1969).

BIRKHOFF, G. (ed.), *A Source Book in Classical Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1973.

BIRKHOFF, G., «Applied mathematics and its future», in *Science and Technology in America*, pp. 83-103, Washington, D. C., National Bureau of Standards, 1977.

BISHOP, E., *Foundations of Constructive Analysis*, Nova Iorque, McGraw-Hill, 1967.

BISHOP, E., *Aspects of Constructivism*, Las Cruces, New Mexico State University, 1972.

BISHOP, E., «The crisis in contemporary mathematics», in *Historia Mathematica*, 2, 507-517 (1975).

BLANCHÉ, R., «Axiomatization», in *Dictionary of the History of Ideas*, vol. I, Scribner's, 1973.

BLOCH, M., *The Historian's Craft*, Nova Iorque, Alfred A. Knopf, 1953.

BLOOR, D., «Wittgenstein and Mannheim on the sociology of mathematics», in *Studies in the History and Philosophy of Science*, 2, 173-191, Nova Iorque, Macmillan, 1973.

BOCHNER, S., *The Role of Mathematics in the Rise of Science,* Princeton, Princeton University Press, 1966.

BOCHNER, S., «Mathematics in cultural history», in *Dictionary of the History of Ideas,* Nova Iorque, Charles Scribner's Sons, 1973.

BOLZANO, B., *Paradoxes of the Infinite* (1850), D. A. Steele (ed.), Londres, Routledge and Kegan Paul, 1950.

BOREL, E., *L'Imaginaire et le réal en mathématiques et en physique,* Paris, Éditions Alvin Michel, 1952.

BOOSS, B., e NISS, M. (eds.), *Mathematics and the Real World,* Basel, Birkhauser Verlag, 1979.

BOWNE, G. D., *The Philosophy of Logic, 1880-1908,* The Hague, Mouton, 1966.

BOYER, C. B., *A History of Mathematics,* Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1968.

BRIDGMAN, P. W., *The Way Things Are,* Cambridge, Harvard University Press, 1959.

BROOKS, F. P., Jr., *The Mythical Man-Month: Essays on Software Engineering,* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1975.

BRUNER, J. S., *On Knowing: Essays for the Left Hand,* Nova Iorque, Atheneum, 1970.

BRUNER, J. S., *The Process of Education,* Cambridge, Harvard University Press, 1960.

BRUNO, G., *Articuli centum et sexaginta adversos huius tempestatis mathematicos atque philosophos,* Praga, 1588.

BRUNSCHVICG, L., *Les Étapes de la philosophie mathématique,* Paris, Alcan, 1912.

BUDDEN, F. J., *The Fascination of Groups,* Cambridge, Cambridge University Press, 1972.

BUNGE, M., *Intuition and Science,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962.

BUNT, L. N. H., JONES, P. S., e BEDIENT, J. D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976.

BURGESS, J. P., «Forcing», *in* Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* pp. 403-452, Amsterdão, North-Holland, 1977.

CAJORI, F., *The Early Mathematical Sciences in North and South America,* Boston, R. G. Badger, 1928.

CAJORI, F., *History of Mathematical Notations,* Chicago, The Open Court Publishing Co., 1928-1929.

CHIHARA, C. S., *Ontology and the Vicious Circle Principle,* Ithaca, N. I., Cornell University Press, 1973.

CHINN, W. C., e STEENROD, N. E., *First Concepts of Topology,* Washington, D. C., The New Mathematical Library, Mathematical Association of America, 1966.

CLARK, C. N., *Science and Social Welfare in the Age of Newton,* Oxford, Oxford University Press, 1949.

COHEN, M. R., e DRABKIN, I. E., *Source Book in Greek Science,* Cambridge, Harvard University Press, 1958.

COHEN, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* Nova Iorque, W. A. Benjamin, 1966.

Cohen, P. J., «Comments on the foundation of set theory», *in* Dana Scott (ed.), *Axiomatic Set Theory,* pp. 9-15, Providence R. I., American Mathematical Society, 1971.

Cohen, P. J., e Hersh, R., «Non-Cantorian set theory», in *Mathematics in the Modern World,* São Francisco, W. H. Freeman, 1968.

Copy, I. M., e Gould, J. A. (eds.), *Readings on Logic,* Nova Iorque, Macmillan, 1967.

Courant, R., e Robbins, H., *What is Mathematics?,* Nova Iorque, Oxford University Press, 1948.

Crossley, J., *et al., What is Mathematical Logic?,* Oxford, Oxford University Press, 1972.

Crowe, M. J., «Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics», in *Historia Mathematica,* 2, 161-166 (1975).

Cudhea, D., «Artificial intelligence», in *The Stanford Magazine,* Primavera/Verão (1978).

Curry, H. B., «Some aspects of the problem of mathematical rigor», artigo apresentado na reunião da The American Mathematical Society, Nova Iorque, 26 de Outubro de 1940.

Curry, H. B., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics,* Amsterdão, North Holland, 1951.

Dantzig, T., *Henri Poincaré: Critic of Crises. Reflections on His Universe of Discourse,* Nova Iorque, Charles Scribner's Sons, 1954.

Dantzig, T., *Number, the Language of Science,* Nova Iorque, Macmillan, 1959.

Dauben, J. W., «The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets», in *Arch. History of the Exact Sciences,* 7, 181-216 (1971).

Davis, C., «Materialist mathematics», in *Boston Studies in the Philosophy of Science,* 15, 37-66, Dordrecht, D. Reidel, 1974.

Davis, H. T., *Essays in the History of Mathematics*, Evanston Illinois (mimeografado), 1949.

Davis, M., *Applied Non-standard Analysis*, Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1977.

Davis, M., *The Undecidable,* Hewlett, Nova Iorque, Raven Press, 1965.

Davis, M., «Unsolvable problems», *in* Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* Amsterdão, North-Holland, 1977.

Davis, M., e Hersh, R., «Non-standard analysis», in *Scientific American,* Junho de 1972, pp. 78-84.

Davis, M., e Hersh, R., «Hilbert's tenth problem», in *Scientific American,* Novembro de 1973, pp. 84-91.

Davis, N. P., *Lawrence and Oppenheimer,* Nova Iorque, Simon and Schuster, 1968.

Davis, P. J., «Leonard Euler integral: an historical profile of the gamma function», in *American Mathematical Monthly,* 66, 849-869 (1959).

Davis, P. J., «The criterion makers: mathematics and social policy», in *American Scientist,* 50, 258A-274A (1962).

DAVIS, P. J., «Number», in *Scientific American,* Setembro de 1964, reimp. in *Mathematics: An Introduction to its Spirit and Use,* São Francisco, W. H. Freeman, 1978.
DAVIS, P. J., «Numerical analysis», in *The Mathematical Sciences,* pp. 128-137, Cambridge, MIT Press, 1969.
DAVIS, P. J., «Fidelity in mathematical discourse: is 1+1 really 2?», in *American Mathematical Monthly,* 78, 252-263 (1972).
DAVIS, P. J., «Simple quadratures in the complex plane», in *Pacific Journal of Mathematics,* 15, 813-824 (1965).
DAVIS, P. J., «Visual geometry, computer graphics, and theorems of perceived type», in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* vol. 20, Providence R. I., American Mathematical Society, 1974.
DAVIS, P. J., «Towards a Jamesian history of mathematics», palestra convidada na reunião de Inverno da American Mathematical Society, 22 de Janeiro de 1967, San Antonio, Texas.
DAVIS, P. J., «Mathematics by fiat?», in *The Two Year College Mathematics Journal,* Junho de 1980.
DAVIS, P. J., *Circulant Matrices,* Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1979.
DAVIS, P. J., e ANDERSON, H. A., «Non-analytic aspects of mathematics and their implication for research and education», in *SIAM Review,* 21, 112-127 (1979).
DAVIS, P. J., e CERUTTI, E., «FORMAC meets pappus: some observations on elementary analytic geometry by computer», in *American Mathematical Monthly,* 75, 895-905 (1969).
DEE, J., *Monas Hieroglyphica,* 1564.
DEE, J., *The Mathematical Praeface to the Elements of Geometrie of Euclid of Megara* (1570) (com uma introdução por Allen G. Debus), Nova Iorque, Neale Watson Academic Publications, 1975.
DEMILLO, R. A., LIPTON, R. J., e PERLIS, A. J., «Social processes and proofs of theorems and programs», comunicações, ACM-22, 271-280 (1979).
DERTOUZOS, M. L., e MOSES, J. (eds.), *The Computer Age: A Twenty Year View,* Cambridge, MIT Press, 1979.
DESARMANIEN, J., KUNG, J. P. S., e ROTA, G.-C., «Invariant theory, Young bitableaux and combinatories», in *Advances in Mathematics,* 27, 63-92 (1978).
DICKSON, L. E., «History of the theory of numbers», vol. 2, Nova Iorque, G. E. Stechert, 1934.
Dictionary of the History of Ideas, Nova Iorque, Charles Scribner's Sons, 1973.
DIEUDONNÉ, J., «Modern axiomatic methods and the foundations of mathematics», in *Great Currents of Mathematical Thought,* vol. 2, pp. 251-266, Nova Iorque, Dover, 1971.
DIEUDONNÉ, J., «The work of Nicholas Bourbaki», in *American Mathematical Monthly,* 77, 134-145 (1970).
DIEUDONNÉ, J., «Should we teach modern mathematics?», in *American Scientist,* 61, 16-1 9 (1973).
DIEUDONNÉ, J., *Panorame des mathématiques pures: le choix bon'bachique,* Paris, Bordas, Dunod, Gauthier-Villars, 1977.

DI SESSA, A., *Turtle Escapes the Plane: Some Advanced Turtle Geometry,* Artificial Intelligence Memo 348, Artificial Intelligence Laboratory, MIT, Boston, Mass., Dezembro de 1975.

DRESDEN, A., «Mathematical certainty», in *Scientia,* 45, 369-374 (1929).

DREYFUS, H., *What Computers Can't Do: A Critique of Artificial Reason,* Nova Iorque, Harper & Row, 1972.

DUHEM, P., *The Aim and Structure of Physical Theory,* 1.ª ed., 1906, Princeton, Princeton University Press, 1954.

DUMMETT, M., *Elements of Intuitionism,* Oxford, The Clarendon Press, 1977.

DUMMETT, M., *Reckonings: Wittgenstein on Mathematics,* ed., C. Diamond, notas de R. Bosanquet, N. Malcolm, R. Rhees, Y. Smithies, Cambridge, 1939.

DUNMORE, P., «The uses of fallacy», in *New Zealand Mathematics Magazine,* 1970.

DUNNINGTON, G. W., *C. F. Gauss,* Nova Iorque, Exposition Press, 1955.

DUPREE, A. H., *Science in the Federal Government,* Cambridge, Harvard University Press, 1957.

DYGK, M., *Novalis and Mathematics,* Chapel Hill, University of North Carolina Press, 1960.

EDWARDS, H. M., *Riemann's Zeta Function,* Nova Iorque, Academic Press, 1974.

EDMUNSON, H. P., *Definitions of Random Sequences,* TR-360, Computer Science Department, University of Maryland, College Park, Maryland, Março de 1975.

EUCLIDES, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* introdução e comentários de T. L. Heath, Nova Iorque, Dover, 1956.

EVES, H., e NEWSOM, C. V., *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics,* Nova Iorque, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

FANG, J., e TAKAYAMA, K. P., *Sociology of Mathematics and Mathematicians,* Hauppauge, Nova Iorque, Paideia Press, 1975.

FEFERMAN, S., *The Logic of Mathematical Discovery* vs. *The Logical Structure of Mathematics,* Department of Mathematics, Stanford University, 1976.

FEFERMAN, S., «What does logic have to tell us about mathematical proofs?», in *Mathematical Intelligencer,* 2, n.º 4.

FERGUSON, E. S., «The mind's eye: nonverbal thought in technology», in *Science,* 197, 827-836 (1977).

FISHER, C. S., «The death of a mathematical theory: a study in the sociology of knowledge», in *Arch. History of the Exact Sciences,* 3, 137-159 (1966).

FITZGERALD, A., e MACLANE, S. (eds.), *Pure and Applied Mathematics in the People's Republic of China,* Washington, D. C., National Academy of Sciences, 1977.

FRAENKEL, A. A., «The recent controversies about the foundations of mathematics», in *Scripta Mathematica,* 13, 17-36 (1947).

FRAME, J. S., «The working environment of today's mathematician», in T. L. Saaty e F. J. Weyl (eds.), *The Spirit and Uses of the Mathematical Sciences,* Nova Iorque, McGraw-Hill, 1969.

FRANK, P., «The place of logic and metaphysics in the advancement of modern science», in *Philosophy of Science,* 5, 275-286 (1948).

FRENCH, P. J., *John Dee,* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1972.

FREUDENTHAL, H., *The Concept and Role of the Model in Mathematics and Social Sciences,* Dordrecht, Reidel, 1961.

FREUDENTHAL, H., «Symbole», in *Encyclopaedia Universalis,* Paris, 1968.

FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an Educational Task,* Dordrecht, Reidel, 1973.

FREUDENTHAL, H., *Weeding and Sowing,* Dordrecht, Reidel, 1973.

FRIEDMAN, J. I., *On Some Relations between Leibniz' Monodology and Transfinite Set Theory (A Complement to Russell Thesis), Akten des II Internationalen Leibniz-Kongresses,* Wiesbaden, Franz Steiner, 1975.

FRIEDMAN, J. I., «Some set theoretical partition theorems suggested by the structure of Spinoza's God», in *Synthese,* 27, 199-209 (1974).

GAFFNEY, M. P., e STEEN, L. A., *Annotated Bibliography of Expository Writings in the History of the Mathematical Sciences,* Washington, D.C., Mathematical Association of America, 1976.

GARDNER, H., *The Shattered Mind,* Nova Iorque, Knopf, 1975.

GARDNER, M., *Aha! Insight,* São Francisco, W. H. Freeman, 1978 (*Ah, Descobri!,* Lisboa, Gradiva, 1989).

GILLINGS R. A., *Mathematics in the Times of the Pharaohs*, Cambridge, MIT Press, 1972.

GODEL, K., «What is Cantor's continuum problem?», *in* P. Benacerraf e H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics, Selected Readings,* pp. 258-273, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964.

GOLDSTEIN, I., e PAPERT, S., *Artificial Intelligence Language and the Study of Knowledge,* MIT Artificial Intelligence Laboratory, Memo. 337, Boston, Março de 1976.

GOLDSTINE, H. H., *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton, Princeton University Press, 1972.

GOLDSTINE, H. H., *A History of Numerical Analysis,* Nova Iorque, Springer, 1977.

GOLOS, E. B., *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry,* Nova Iorque, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

GONSETH, F., *Philosophie Mathématique,* Paris, Hermann, 1939.

GOOD, I. J., e CHURCHHOUSE, R. F., «The Riemann hypothesis and pseudorandom features of the Mobius sequence», in *Mathematics of Computation,* 22, 857--864 (1968).

GOODFIELD, J., «Humanity in science: a perspective and a plea», in *The Key Reporter,* 42, Verão de 1977.

GOODMAN, N. D., «Mathematics as an objective science», in *Americam Mathematical Monthly,* 86, 540-551 (1979).

GORENSTEIN, D., «The classification of finite simple groups», in *Bulletin of the American Mathematical Society,* NS 1, 43-199 (1979).

GRABINER, J. V., «Is mathematical truth time-dependent?», in *American Mathematical Monthly,* 81, 354-365 (1974).

GRATTAN-GUINNESS, I., *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann,* Cambridge, MIT Press, 1970.

GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History,* São Francisco, W. H. Freeman, 1974.
GREENWOOD, T., «Invention and description in mathematics», reunião da Aristotelian Society, 1/20, 1930.
GRENANDER, U., *Mathematical Experiments on the Computer,* Divisão da Applied Mathematics, Brown University, Providence R. I., 1979.
GRIFFITHS, J. G., *Plutarch's De Iside et Osiride,* University of Wales Press, 1970.
GROSSWALD, E., *Topics from the Theory of Numbers,* Nova Iorque, Macmillan, 1966.
GUGGENHEIMER, H., «The axioms of betweenness in Euclid», in *Dialectica,* 31, 187-192 (1977).
HACKING, I., «Review of I. Lakatos' philosophical papers», in *British Journal of the Philosophy of Science* (a publicar).
HADAMARD, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* Princeton, Princeton University Press, 1945.
HAHN, H., «The crisis in intuition», *in* J. R. Newman (ed.), *The World of Mathematics,* pp. 1956-1976, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1956.
HALMOS, P., «Mathematics as a creative art», in *American Scientist,* 56, 375-389 (1968).
VON HARDENBERG, F. (Novalis), *Tagebucher,* Munique, Hanser, 1978.
HARDY, G. H., «Mathematical proof», in *Mind,* 38, 1-25 (1929).
HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology,* Cambridge, Cambridge University Press, 1967.
HARTREE, D. R., *Calculating Instruments and Machines,* Urbana, University of Illinois Press, 1949.
HEATH, T. L., *A History of Greek Mathematics,* Oxford, The Clarendon Press, 1921.
HEATH, T. L., *Euclid's Elements,* vol. I, Nova Iorque, Dover, 1956.
HEISENBERG, W., «The representation of nature in contemporary physics», *in* Rollo May (ed.), *Symbolism in Religion and Literature,* Nova Iorque, Braziller, 1960.
HENKIN, L. A., «Are logic and mathematics identical?», in *The Chauvenet Papers,* vol. II, Washington, D. C., The Mathematical Association of America, 1978.
HENRIGI, P., «Reflections of a teacher of applied mathematics», in *Quarterly of Applied Mathematics,* 30, 31-39 (1972).
HENRIGI, P., «The influence of computing on mathematical research and education», in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* vol. 20, Providence, American Mathematical Society, 1974.
HERSH, R., «Some proposals for reviving the philosophy of mathematics», in *Advances in Mathematics,* 31, 31-50 (1979).
HERSH, R., «Introducing Imre Lakatos», in *Mathematical Intelligencer,* 1, 148-151 (1978).
HESSEN, B., *The Social and Economic Roots of Newton's Principia,* Nova Iorque, Howard Fertig, 1971.

HILBERT, D., «On the infinite», *in* P. Benacerraf e H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pp. 134-151, Englewood Cliffs, Prentice--Hall, 1964.

HONSBERGER, R., *Mathematical Gems,* II, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1973.

HORN, W., «On the selective use of sacred numbers and the creation in Carolingian architecture of a new aesthetic based on modular concepts», in *Viator,* 6, 351-390 (1975).

HOROVITZ, J., *Law and Logic,* Nova Iorque, Springer, 1972.

HOUSTON, W. R. (ed.), *Improving Mathematical Education for Elementary School Teachers,* East Lansing, Michigan, Michigan State University, 1967.

HOWSON, A. G. (ed.), *Developments in Mathematical Education,* Cambridge, Cambridge University Press, 1973.

HRBACEK, K., e JECH, T., *Introduction to Set Theory,* Nova Iorque, Marcel Dekker, 1978.

HUNT, E. B., *Artificial Intelligence,* Nova Iorque, Academic Press, 1975.

HUNTLEY, H. E., *The Divine Proportion,* Nova Iorque, Dover, 1970.

HUSSERL, E., «The origins of geometry», apêndice VI *in* Edmund Husserl, *The Crisis of European Science*, trad. por David Carr, Evanston, Northwestern University Press, 1970.

ILIEV, L., «Mathematics as the science of models», in *Russian Mathematical Surveys,* 27, 181-189 (1972).

JACOB, F., «Evolution and tinkering», in *Science,* 196, 1161-1166 (1977).

JAMES, W., «Great men and their environment», in *Selected Papers on Philosophy*, pp. 165-197, Londres, J. M. Dent and Sons, 1917.

JAMES, W., *Psychology (Briefer Course),* Nova Iorque, Collier, 1962.

JAMES, W., *The Varieties of Religious Experiences,* reed., Nova Iorque, Mentor Books, 1961.

JOSTEN, C. H., «A translation of Dee's 'Monas Hieroglyphica' with an introduction and annotations», in *Ambix,* 12, 84-221 (1964).

JOUVENEL, B. de, «The republic of science», in *The Logic of Personal Knowledge: Essays to M. Polányi,* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1961.

JUNG, C. J., *Man and his Symbols,* Garden City, Nova Iorque, Doubleday, 1964.

JUSTER, N., *The Phantom Tollbooth,* Nova Iorque, Random House, 1961.

KAC, M., «Statistical independence in probability, analysis and number theory», in *Carus Mathematical Monographs,* n.º 12, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1959.

KANTOROWICZ, E., *Frederick the Second,* Londres, Constable, 1931.

KASNER, E., e NEWMAN, J., *Mathematics and the Imagination,* Nova Iorque, Simon and Schuster, 1940.

KATZ, A., «Toward high information-level culture», in *Cybernetica,* 7, 203-245 (1964).

KERSHNER, R. B., e WILCOX, L. R., *The Anatomy of Mathematics,* Nova Iorque, Ronald Press, 1950.

KESTIN, J., «Creativity in teaching and learning», in *American Scientist,* 58, 250--257 (1970).

KLEENE, S. C., «Foundations of mathematics», in *Encyclopaedia Britannica,* 14.ª ed., vol. 14, pp. 1097-1103, Chicago, 1971.

KLENK, V. H., *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,* The Hague, Nijhoff, 1976.

KLIBANSKY, R. (ed.), *La philosophie contemporaine,* vol. I, Florença, UNESCO, 1968.

KLINE, M. (ed.), *Mathematics in the Modern World. Readings from Scientific American,* São Francisco, W. H. Freeman, 1968.

KLINE, M., «Logic *versus* pedagogy», in *American Mathematical Monthly,* 77, 264-282 (1970).

KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford, Oxford University Press, 1972.

KLINE, M., *Why the Professor Can't Teach,* Nova Iorque, St. Martin's Press, 1977.

KNEEBONE, I. G. T., e CAVENDISH, A. P., «The use of formal logic», in *The Aristotelian Society Supplementary,* vol. 45, 1971.

KNOWLTON, K., «The use of FORTRAN-coded EXPLOR for teaching computer graphics and computer art», in *Proceedings of the ACM SIGPLAN Symposium on Two-Dimensional Man-Machine Communication,* Los Alamos, Novo México, 5-6 de Outubro de 1972.

KNUTH, D. E., «Mathematics and computer science: coping with finiteness», in *Science,* 192, 1235-1242 (1976).

KOESTLER, A., *The Sleepwalkers,* Nova Iorque, Macmillan, 1959.

KOESTLER, A., *The Act of Creation,* Londres, Hutchinson, 1964.

KOLATA, G. B., «Mathematical proof: the genesis of reasonable doubt», in *Science,* 192, 989-990 (1976).

KOLMOGOROV, A. D., «Mathematics», in *Great Soviet Encyclopaedia,* 3.ª ed., Nova Iorque, Macmillan, 1970.

KOPELL, N., e STOLTZENBERG, G., «Commentary on bishop's talk», in *Historia Mathematica,* 2, 519-521 (1975).

KORNER, S., «On the relevance of post-godelian mathematics to philosophy», I, Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics,* pp. 118-133, Amsterdão, North-Holland, 1967.

KOVALEVSKAYA, S., *A Russian Childhood,* trad. por Beatrice Stillman, Nova Iorque, Springer-Verlag, 1978.

KUHN, T. S., *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, University of Chicago Press, 1962.

KUHNEN, K., «Combinatorics», *in* Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* pp. 371-401, Amsterdão, North-Holland, 1977.

KUNTZMANN, J., *Où vont les mathematiques?,* Paris, Hermann, 1967.

KUYK, W., *Complementarity in Mathematics,* Dordrecht, Reidel, 1977.

LAKATOS, I., «Infinite regress and the foundations of mathematics», in *Aristotelian Society Supplementary,* vol. 36, pp. 155-184 (1962).

LAKATOS, I., «A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?», *in* I. Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics,* pp. 199-203, Amsterdão, North-Holland, 1967.

LAKATOS, I., *Proofs and Refutations,* J. Worral e E. Zahar (eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 1976.

LAKATOS, I., *Mathematics, Science and Epistemology,* Cambridge, Cambridge University Press, 1978.

LAKATOS I., e MUSGRAVE, A. (eds.), *Problems in the Philosophy of Science,* Amsterdão, North-Holland, 1968.

LANGER, R. I., «Fourier series», in *Slaught Memorial Paper, American Mathematical Monthly,* 54 (suplemento), pp. 1-86 (1947).

LASSERRE, F., *The Birth of Mathematics in the Age of Plato,* Larchmont, Nova Iorque, American Research Council, 1964.

LEBESGUE, H., *Notices d'histoire des mathématiques. L'enseignement mathématique,* Genebra, 1958.

LEHMAN, H., *Introduction to the Philosophy of Mathematics,* Totowa, N. J., Rowman and Littlefield, 1979.

LEHMER, D. N., *List of Prime Numbers from 1 to 10,006,721,* Washington, D. C., Carnegie Institution of Washington, publicação n.º 163 (1914).

LEITZMANN, W., *Visual Topology,* trad. por M. Bruckheimer, Londres, Chatto and Windus, 1965.

LEVINSON, N., «Wiener's life», in *Bulletin of the American Mathematical Society,* 72, 1-32 (1966) (número especial sobre Norbert Wiener).

LIBBRECHT, U., *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century,* Cambridge, MIT Press, 1973.

LICHNEROWICZ, A., «Rémarques sur les mathématiques et la realité», in *Logique et connaissance scientifique,* Dijon, Encyclopédie de la Pléiade, 1967.

LITTLETON, A. C., e YAMEY, B. S. (eds.), *Studies in the History of Accounting,* Homewood, Illinois, R. D. Irwin, 1956.

LITTLEWOOD, J. E., *A Mathematician's Miscellany,* Londres, Methuen and Co., 1953.

MACFARLANE, A., *Ten British Mathematicians,* Nova Iorque, John Wiley and Sons, 1916.

MAIMONIDES, M., *Mishneh Torah,* ed. e trad. por M. H. Hyamson, Nova Iorque, 1937.

MANIN, Y. I., *A Course in Mathematical Logic,* Nova Iorque, Springer-Verlag, 1977.

MARSAK, L., *The Rise of Science in Relation to Society,* Nova Iorque, Macmillan, 1966.

MAZIARZ, E. A., GREENWOOD, T., *Greek Mathematical Philosophy,* Nova Iorque, Ungar, 1968.

MEDAWAR, P. B., *The Art of the Solvable,* Londres, Methuen, 1967 (em particular «Hypothesis and imagination»).

MEHRTENS, H., «T. S. Kuhn's theories and mathematics», in *Historia Mathematica,* 3, 297-320 (1976).

MERLAN, P., *From Platonism to Neoplatonism,* The Hague, Martinus Nijhoff, 1960.

MESCHKOWSKI, H., *Ways of Thought of Great Mathematicians,* trad. por John Dyer-Bennet, São Francisco, Holden-Day, 1964.

MEYER ZUR CAPELLEN, W., *Mathematische Maschinen und Instrumente,* Berlim, Akademie Verlag, 1951.

MICHENER, E. R., *The Epistemology and Associative Representation of Mathematical Theories with Application to an Interactive Tutor System,* tese de doutoramento, Departamento de Matemática, MIT, Cambridge, Mass., 1977.

MIKAMI, Y., «The development of mathematics in China and Japan», in *Abhandlung zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaftten,* 30, 1-347 (1913), reed. Chelsea, Nova Iorque.

MINSKY, M., *Computation: Finite and Infinite Machines,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.

VON MISES, R., *Mathematical Theory of Probability and Statistics,* Nova Iorque, Academic Press, 1964.

MOLLAND, A. G., «Shifting the foundations: Descartes' transformation of ancient geometry», in *Historia Mathematica,* 3, 21-79 (1976).

MONK, J. D., «On the foundations of set theory», in *American Mathematical Monthly,* 77, 703-711 (1970).

MORITZ, R. E., *Memorabilia Mathematica,* Nova Iorque, Macmillan, 1914.

MOYER, R. S., e LANDAUER, T. K., «Time required for judgements of a numerical inequality», in *Nature,* 215, 1519-1529 (1967).

MOYER, R. S., e LANDAUER, T. K., «Determinants of reaction time for digit inequality judgements», in *Bulletin of the Psychonomic Society,* 1, 167-168 (1973).

MURRAY, F. J., *Mathematical Machines,* Nova Iorque, Columbia University Press, 1961.

MURRAY, F. J., *Applied Mathematics: An Intellectual Orientation,* Nova Iorque, Plenum Press, 1978.

MUSGRAVE, A., «Logicism revisited», in *British Journal of the Philosophy of Science,* 28, 99-127 (1977).

NALIMOV, V. V., *Logical Foundations of Applied Mathematics,* Dordrecht, Reidel, 1974.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (ed.), *The Mathematical Sciences,* Cambridge, MIT Press, 1969.

NEEDHAM, J., *Science and Civilization in China,* vol. III, Cambridge, Cambridge University Press, 1959.

NEUGEBAUER, O., «Babylonian astronomy: arithmetical methods for the dating of Babylonian astronomical texts», in *Studies and Essays to richard Courant on His Sixtieth Birthday,* pp. 265-275, Nova Iorque, 1948.

NEUGEBAUER, O., *The Exact Sciences in Antiquity,* Nova Iorque, Dover, 1957.

NEUGEBAUER, O., e VON HOESEN, H. B., *Greek Horoscopes,* Filadélfia, American Philosophical Society, 1959.

NEUGEBAUER, O., e SACHS, A. J., *Mathematical Cuneiform Texts,* New Haven, American Oriental Society e American Schools of Oriental Research, 1945.

VON NEUMANN, J., «The mathematician», in *Works of the Mind,* Robert B. Heywood (ed.), Chicago, University of Chicago Press, 1947.

NEWMAN, J. R. (ed.), *The World of Mathematics,* quatro volumes, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1956.

NOVY, L., *Origins of Modern Algebra,* trad. por Jaroslav Taver, Leiden, Noordhoff International Publishing, 1973.

PACIOLI, L., *De Divina Proportione,* 1509, reed. 1956.

PAPERT, S., *Teaching Children to be Mathematicians* vs. *Teaching About Mathematics,* Memo. n.º 249, Artificial Intelligence Laboratory, MIT, Boston, Mass., Julho de 1971.

PAPERT, S., «The mathematical unconscious», *in* Judith Wechsler (ed.), *On Aesthetics in Science,* pp. 105-121, Cambridge, MIT Press, 1978.

PIERPONT, J., «Mathematical rigor, past and present», in *Bulletin of the American Mathematical Society,* 34, 23-53 (1928).

PHILLIPS, D. L., *Wittgenstein and Scientific Knowledge,* Nova Iorque, Macmillan, 1977.

PIAGET, J., *Psychology and Epistemology,* trad. por Arnold Rosin, Nova Iorque, Grossman, 1971.

PIAGET, J., *Genetic Epistemology,* trad. por Eleanor Duckworth, Nova Iorque, Columbia University Press, 1970.

PINGREE, D., «Astrology», in *Dictionary of the History of Ideas,* Nova Iorque, Charles Scribner's Sons, 1973.

POINCARÉ, H., «Mathematical creation», in *Scientific American,* 179, 54-57 (1948); também *in* M. Kline (ed.), *Mathematics and the Modern World,* pp. 14-17, São Francisco, W. H. Freeman (1968), e *in* J. R. Newman (ed.), *The World of Mathematics,* vol. 4, pp. 2041-2050, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1956.

POINCARÉ, H., «The future of mathematics», in *Revue genérale des sciences pures et appliquées,* vol. 19, Paris, 1908.

POLÁNYI, M., *Personal Knowledge: towards a Post-Critical Philosophy,* Chicago, University of Chicago Press, 1960.

POLÁNYI, M., *The Tacit Dimension,* Nova Iorque, Doubleday, 1966.

PÓLYA, G., *How to Solve It,* Princeton, Princeton University Press, 1945.

PÓLYA, G., *Patterns of Plausible Inference,* dois volumes, Princeton, Princeton University Press, 1954.

PÓLYA, G., *Mathematical Discovery,* dois volumes, Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1962.

PÓLYA, G., «Some mathematicians I have known», in *American Mathematical Monthly,* 76, 746-752 (1969).

PÓLYA, G., *Mathematical Methods in Science,* Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1978.

PÓLYA, G., e KILPATRICK, J., *The Stanford Mathematics Problem Book,* Nova Iorque, Teacher's College Press, 1974.

POPPER, K. R., *Objective Knowledge,* Oxford, The Clarendon Press, 1972.

POPPER, K. R., e ECCLES, J. C., *The Self and its Brain,* Nova Iorque, Springer International, 1977.

PRATHER, R. E., *Discrete Mathematical Structures for Computer Science,* Boston, Houghton Mifflin, 1976.
PRENOWITZ, W., e JORDAN, M., *Basic Concepts of Geometry,* Nova Iorque, Blaisdell-Ginn, 1965.
PRIEST, G., *A Bedside Reader's Guide to the Conventionalist Philosophy of Mathematics,* Bertrand Russell Memorial Logic Conference, Uldum, Dinamarca, 1971, University of Leeds, 1973.
PUTNAM, H., *Mathematics, Matter and Method,* Londres e Nova Iorque, Cambridge University Press, 1975.
RABIN, M. O., «Decidable theories», *in* Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* Amsterdão, North-Holland, 1977.
IRABIN, M. O., «Probabilistic algorithms», *in* J. F. Taub (ed.), *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results,* Nova Iorque, Academic Press, 1976.
REBIÈRE, A., *Mathématiques et Mathématicien,* 2.ª ed., Paris, Libraire Nony et Cie., 1893.
RIED, C., *Hilbert,* Nova Iorque, Springer-Verlag, 1970.
RÉNYI, A., *Dialogues on Mathematics,* São Francisco, Holden-Day, 1967.
RESCH, R. D., «The topological design of sculptural and architectural systems», in *AFIPS Conference Proceedings,* vol. 42, pp. 643-650 (1973).
RESTLE, F., «Speed of adding and comparing numbers», in *Journal of Experimental Psychology,* 83, 274-278 (1970).
ROBINSON, A., *Nonstandard Analysis,* Amsterdão, North Holland, 1966.
ROBINSON, A., «From a formalist point of view», in *Dialectica,* 23, 45-49 (1969).
ROBINSON, A., «Formalism 64», in *Proceedings, International Congressfor Logic, Methodology and Philosophy of Science,* 1964, pp. 228-246.
ROSS, S. L., *Differential Equations,* Nova Iorque, Blaisdell, 1964.
ROTA, G.-C., «A Husserl prospectus», in *The Occasional Review,* n.º 2, 98-106 (Outono de 1974).
ROUSE BALL, W. W., *Mathematical Recreations and Essays,* 11.ª ed., rev. por H. S. M. Coxeter, Londres, Macmillan, 1939.
RUBENSTEIN, M. F., *Patterns of Problem Solving,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.
RUSSELL, B., *The Principles of Mathematics,* Cambridge, Cambridge University Press, 1903.
RUSSELL, B., *A History of Western Philosophy,* Nova Iorque, Simon and Schuster, 1945.
RUSSELL, B., *Human Knowledge, its Scope and its Limits,* Nova Iorque, Simon and Schuster, 1948.
RUSSELL, B., *The Autobiography of Bertrand Russell,* Boston, Little, Brown, 1967.
RUSSELL, B., e WHITEHEAD, A. N., *Principia Mathematica,* Cambridge, Cambridge University Press, 1910.
SAADIA GAON (Saadia ibn Yusuf), *The Book of Beliefs and Opinions,* trad. por S. Rosenblatt, New Haven, Yale University Press, 1948.

SAATY, T. L., e WEYL, F. J., *The Spirit and Uses of the Mathematical Sciences,* Nova Iorque, McGraw-Hill, 1969.

SAMPSON, R. V., *Progress in the Age of Reason: the Seventeenth Century to the Present Day,* Cambridge, Harvard University Press, 1956.

SCHATZ, J. A., *The Nature of Truth* (manuscrito não publicado).

SCHMITT, F. O., e WORDEN, F. G. (eds.), *The Neurosciences: Third Study Program,* Cambridge, MIT Press, 1975.

SCHOENFELD, A. H., *Teaching Mathematical Problem Solving Skills,* Department of Mathematics, Hamilton College, Clinton, Nova Iorque, 1979.

SCHOENFELD, A. H., *Problem Solving Strategies in College-Level Mathematics,* Physics Department, University of California (Berkeley), 1978.

SCOTT, D. (ed.), «Axiomatic set theory», in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* Providence, American Mathematical Society, 1967.

SEIDENBERG, A., «The ritual origin of geometry», in *Archive for the History of the Exact Sciences,* 1, 488-527 (1960-1962).

SEIDENBERG, A., «The ritual origin of counting», in *Archive for the History of the Exact Sciences,* 2, 1-40 (1962-1966).

SHAFAREVITCH, I. R., «Über einige tendenzen in der entwicklung der mathematik», in *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen,* 1973 (alemão, 31-36; original russo, 37-42).

SHOCKLEY, J. E., *Introduction to Number Theory,* Nova Iorque, Holt, Rinehart and Winston, 1967.

SINGER, C., *A Short History of Scientific Ideas,* Oxford, Oxford University Press, 1959.

SJÖSTEDT, C. E., *Le axiome de paralleles,* Lund, Berlingska, 1968.

SLAGLE, J. R., *Artificial Intelligence: The Heuristic Programming Approach,* Nova Iorque, McGraw-Hill, 1971.

SMITH, D. E., e MIKAMI, Y., *Japanese Mathematics*, Chicago, Open Court Publishing Co., 1914.

SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics,* Nova Iorque, McGraw-Hill, 1929.

SNAPPER, E., «What is mathematics?», in *American Mathematical Monthly,* 86, 551-557 (1979).

SPERRY, R.W., «Lateral specialization in the surgically separated hemispheres», in *The Neurosciences: Third Study Program,* F. O. Schmitt e F. G. Worden (eds.), Cambridge, MIT Press, 1975.

STABLER, E. R., *Introduction to Mathematical Thought,* Reading, Mass., Addison-Wesley, 1948.

STEEN, L. A., «Order from chaos», in *Science News,* 107, 292-293 (1975).

STEEN, L. A. (ed.), *Mathematics Today,* Nova Iorque, Springer-Verlag, 1978.

STEINER, G., *After Babel,* Nova Iorque, Oxford University Press, 1975.

STEINER, G., *Language and Silence,* Nova Iorque, Atheneum, 1967.

STEINER, M., *Mathematical Knowledge*, Ithaca, Nova Iorque, Cornell University Press, 1975.

STIBITZ, G. R., «Mathematical instruments», in *Encyclopaedia Britannica,* 14.ª ed., vol. 14, pp. 1083-1087, Chicago, 1971.

STOCKMEYER, L. J., e CHANDRA, A. K., «Intrinsically difficult problems», in *Scientific American,* 140-149, Maio de 1979.
STOLZENBERG, G., «Can an inquiry into the foundations of mathematics tell us anything interesting about mind?», *in* George Miller (ed.), *Psychology and Biology of Language and Thought,* Nova Iorque, Academic Press.
STRAUSS, C. M., «Computer encouraged serendipity in pure mathematics», in *Proceedings of the IEEE,* 62 (1974).
STROYAN, K. D., e LUXEMBURG, W. A. U., *Introduction to the Theory of Infinitesimals,* Nova Iorque, Academic Press, 1976.
STRUIK, D. J., *A Concise History of Mathematics,* Nova Iorque, Dover, 1967 (*História Concisa das Matemáticas,* 2.ª ed., Lisboa, Gradiva, 1990).
STRUIK, D. J., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800,* Cambridge, Harvard University Press, 1969.
SZABÓ, A., «The transformation of mathematics into a deductive science and the beginnings of its foundations on definitions and axioms», in *Scripta Mathematica,* 27, 28-48A, 113-139 (1964).
TAKEUTI, G., e ZARING, W. M., *Introduction to Axiomatic Set Theory,* Nova Iorque, Springer, 1971.
TAVISS, I. (ed.), *The Computer Impact,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1970.
TAYLOR, J. G., *The Behavioral Basis of Perception,* New Haven, Yale University Press, 1948.
THOM, R., «Modern mathematics: an educational and philosophical error?», in *American Scientist,* 59, 695-699 (1971).
THOM, R., «Modern mathematics: does it exist?», *in* A. G. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education,* pp. 194-209, Londres e Nova Iorque, Cambridge University Press, 1973.
TRAUB, J. F., *The Influence of Algorithms and Heuristics,* Department of Computer Science, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, Pa., 1979.
TUCKER, J., «Rules, automata and mathematics», in *The Aristotelian Society,* Fevereiro de 1970.
TYMOCZKO, T., «Computers, proofs and mathematicians: a philosophical investigation of the four-color proof», in *Mathematics Magazine,* 53, 131-138 (1980).
TYMOCZKCO, T., «The four-color problem and its philosophical significance», in *Journal of Philosophy,* 76, 57-83 (1979).
ULAM, S., *Adventures of a Mathematician,* Nova Iorque, Scribners, 1976.
VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening,* Groningen, P. Noordhoff, 1954.
WANG, H., *From Mathematics to Philosophy,* Londres, Routledge and Kegan Paul, 1974.
WECHSLER, J. (ed.), *On Aesthetics in Science,* Cambridge, MIT Press, 1978.
WEDBERG, A., *Plato's Philosophy of Mathematics,* Westport, Conn., Greenwood Press, 1977.
WEINBERG, J., «Abstraction in the formation of concepts», in *Dictionary of the History of Ideas,* vol. I, Charles Scribner's Sons, 1973.
WEISS, E., *Algebraic Number Theory,* Nova Iorque, McGraw-Hill, 1963.

WEISS, G. L., «Harmonic analysis», in *The Chauvenet Papers,* vol. II, pp. 392, Washington, D. C., The Mathematical Association of America, 1978.

WEISSGLASS, J., «Higher mathematical education in the People's Republic of China», in *American Mathematical Monthly,* 86, 440-447 (1979).

WEISSINGER, J., «The characteristic features of mathematical thought», *in* T. L. Saaty e F. J. Weyl (eds.), *The Spirit and Uses of the Mathematical Sciences,* pp. 9-27, Nova Iorque, McGraw-Hill, 1969.

WEYL, H., *God and the Universe: The Open World,* New Haven, Yale University Press, 1932.

WEYL, H., *Philosophy of Mathematics and the Natural Science*, trad. por Olaf Helmer, Princeton, Princeton University Press, 1949.

WHITE, L., Jr., «Medieval astrologers and late medieval technology», in *Viator,* 6, 295-308 (1975).

WHITE, L. A, «The locus of mathematical reality», in *Philosophy of Science,* 14, 289-303 (1947), reed. in *The World of Mathematics,* J. R. Newman (ed.), vol. 4, pp. 2348-2364, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1956.

WHITEHEAD, A. N., *Science and the Modern World,* Nova Iorque, Macmillan, 1925.

WHITEHEAD, A. N., «Mathematics as an element in the history of thought», *in* J. R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, vol. 1, pp. 402-416, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1956.

WIGNER, E. P., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences Communications in Pure and Applied Mathematics,* 13, 1-14 (1960).

WILDER, R. L., «The nature of mathematical proof», in *American Mathematical Monthly,* 51, 309-323 (1944).

WILDER, R. L., *The Foundations of Mathematics,* Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1965.

WILDER, R. L., «The role of intuition», in *Science,* 156, 605-610 (1967).

WILDER, R. L., *The Evolution of Mathematical Concepts,* Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1968.

WILDER, R. L., «Hereditary stress as a cultural force in mathematics», in *Historia Mathematica,* 1, 29-46 (1974).

WITTGENSTEIN, L., *On Certainty,* Nova Iorque, Harper Torchbooks, 1969.

WRONSKI, J. M., *Oeuvres mathématiques,* reed. Paris, J. Hermann, 1925.

YATES, F. A., *Giordano Bruno and the Hermetic Tradition,* Chicago, University of Chicago Press, 1964.

YUKAWA, H., *Creativity and Intuition*, Tóquio, Nova Iorque, São Francisco, Kodansha International, 1973.

ZAGIER, D., «The first 50 million prime numbers», in *The Mathematical Intelligencer,* 0, 7-19 (1977).

ZIMAN, J., *Public Knowledge: The Social Dimension of Science,* Cambridge, Cambridge University Press, 1968.

ZIPPIN, L., *Uses of Infinity*, Washington, D. C., Mathematical Association of America, 1962.